第 5 次作业：

2.6 对因果序列，初值定理为 $\lim_{z\to\infty} X(z)=x(0)$，如果序列为反因果序列，即 $n>0$ 时 $x(n)=0$，问相应的定理是什么？讨论一个序列 $x(n)$，其 z 变换为 $X(z)=\dfrac{\frac{7}{12}-\frac{19}{24}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$，$X(z)$ 的收敛域包括单位圆，试求其 $x(0)$ 的值。

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)u(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}=x(0)+x(-1)z^{1}+x(-2)z^{2}+\cdots$ 故 $\lim_{z\to 0}X(z)=x(0)$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{\frac{7}{12}z-\frac{19}{24}}{z^2-\frac{5}{2}z+1}=\frac{\frac{7}{12}z-\frac{19}{24}}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{4}}{z-2}+\frac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}$$

极点为 $z_1=2$ 和 $z_2=\frac{1}{2}$，又收敛域包括单位圆，所以 $\frac{1}{2}<|z|<2$.

$X(z)$ 由左边序列和右边序列相加而成.

$$x(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{4}z}{z-2}+\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{3}z}{z-\frac{1}{2}}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

2.7 已知因果序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}-z^{-2}}{(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})}$ 如下所示，求相应序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$。

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1-2z^{-1}-z^{-2}}{z(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{z^2-2z-1}{z(z-3)(z-2)}=\frac{-\frac{1}{6}}{z}+\frac{\frac{2}{3}}{z-3}+\frac{\frac{1}{2}}{z-2}$$

极点为 $z_1=3$ 和 $z_2=2$.

$$x(n)=-\frac{1}{6}\delta(n)+\frac{2}{3}\cdot 3^n u(n)+\frac{1}{2}\cdot 2^n u(n)$$

$$x(0)=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=1$$

$$x(\infty)=\infty$$

2.8 有一信号 $y(n)$，它与另两个信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 关系是：$y(n)=x_1(n+3)*x_2(-n-1)$，其中，

$x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),\ x_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$，利用 z 变换的性质求 $y(n)$ 的 z 变换 $X(z)$。

$$\mathcal{Z}[x_1(n)]=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},\ |z|>\frac{1}{2};\quad \mathcal{Z}[x_2(n)]=\frac{z}{z-\frac{1}{3}},\ |z|>\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{Z}[x_1(n+3)]=\frac{z^4}{z-\frac{1}{2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{Z}[x_2(-n)]=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\frac{1}{3}}=\frac{-3}{z-3},\quad |z|<3$$

$$\mathcal{Z}[x_2(-n-1)]=\frac{-3z}{z-3},\quad |z|<3$$

由 $y(n)=x_1(n+3)*x_2(-n-1)$

$$Y(n)=\mathcal{Z}[x_1(n+3)]\cdot\mathcal{Z}[x_2(-n-1)]=\frac{-3z^5}{(z-\frac{1}{2})(z-3)},\quad \frac{1}{2}<|z|<3$$

2.9 求序列 $x(n)=a^nR_N(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$。

$$\begin{aligned}x(n)&=a^nR_N(n)\\&=a^nu(n)-a^{n-N}u(n-N)\\&=a^nu(n)-a^{-N}a^nu(n-N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(z)&=\mathcal{Z}[a^nu(n)]-\mathcal{Z}[a^{-N}a^nu(n-N)]\\&=\mathcal{Z}[a^nu(n)]-a^{-N}\mathcal{Z}[a^nu(n-N)]\\&=\frac{z}{z-a}-\frac{a^{-N}z^{-N+1}}{z-a}\\&=\frac{z(1-a^{-N}z^{-N})}{z-a}\end{aligned}$$

$$X(e^{-jw})=\frac{e^{jw}(1-a^{-N}e^{-jwN})}{e^{jw}-a}$$