

5.4 有限长单位冲激响应（FIR） 滤波器的基本结构

有限长单位冲激响应（FIR）滤波器的特点：

1. 系统的单位冲激响应 $h(n)$ 在有限个 N 值处不为零
 $h(n), 0 \leq n \leq N-1$
2. 系统函数 $H(z)$ 在 $|z| > 0$ 处收敛，在 $|z| > 0$ 上只有零点，全部极点在 $z=0$ 处（稳定因果系统）。
3. 结构主要是非递归型结构，没有输出到输入的反馈，但也可以含有反馈的递归结构

设FIR滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 为一个N点序列，则滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

它有N-1阶极点在 $z=0$ 处，有N-1个零点位于 z 平面的任何位置。

其系统输入输出的差分方程为：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

任何一个**FIR**系统函数的基本结构可以有4种类型

1. 横截型（卷积型，直接型）
2. 级联型
3. 频率抽样型
4. 快速卷积结构

当**FIR**系统满足线性相位条件时，其结构可以为线性相位滤波器结构

为什么**FIR**没有并联型？



一、横截型

考虑**FIR**系统的差分方程

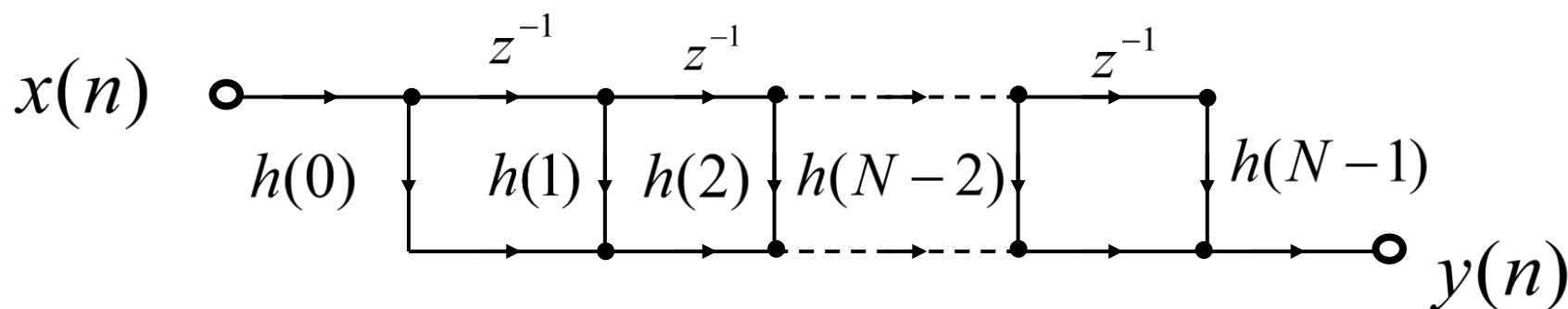
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

此式就是线性移不变系统的线性卷积公式，故又称为卷积型。

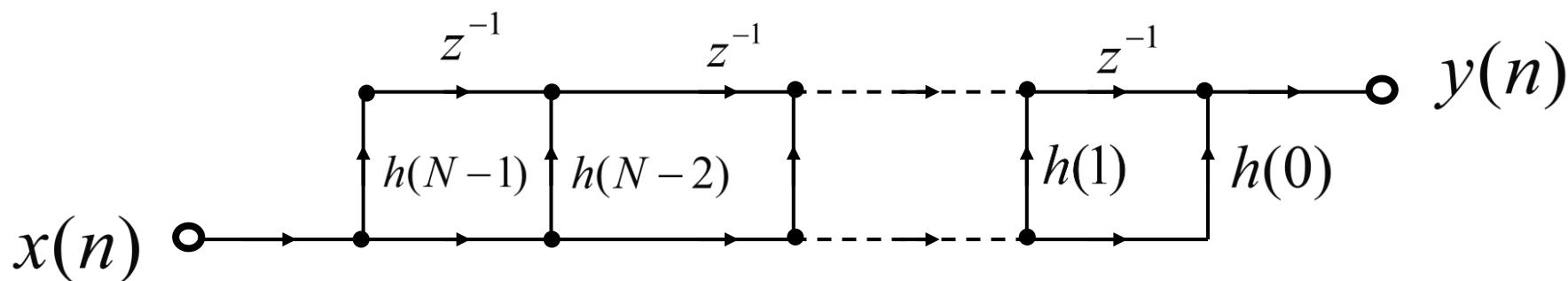
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

$$= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1)$$

根据差分方程可以直接画出**FIR**滤波器的横截型结构，如图所示。



应用转置定理，得到转置直接型结构，
如图所示。



$$\begin{aligned}
 y(n) &= h(N-1)x(n-N+1) + \dots + h(1)x(n-1) + h(0)x(n) \\
 &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)
 \end{aligned}$$

二、级联型

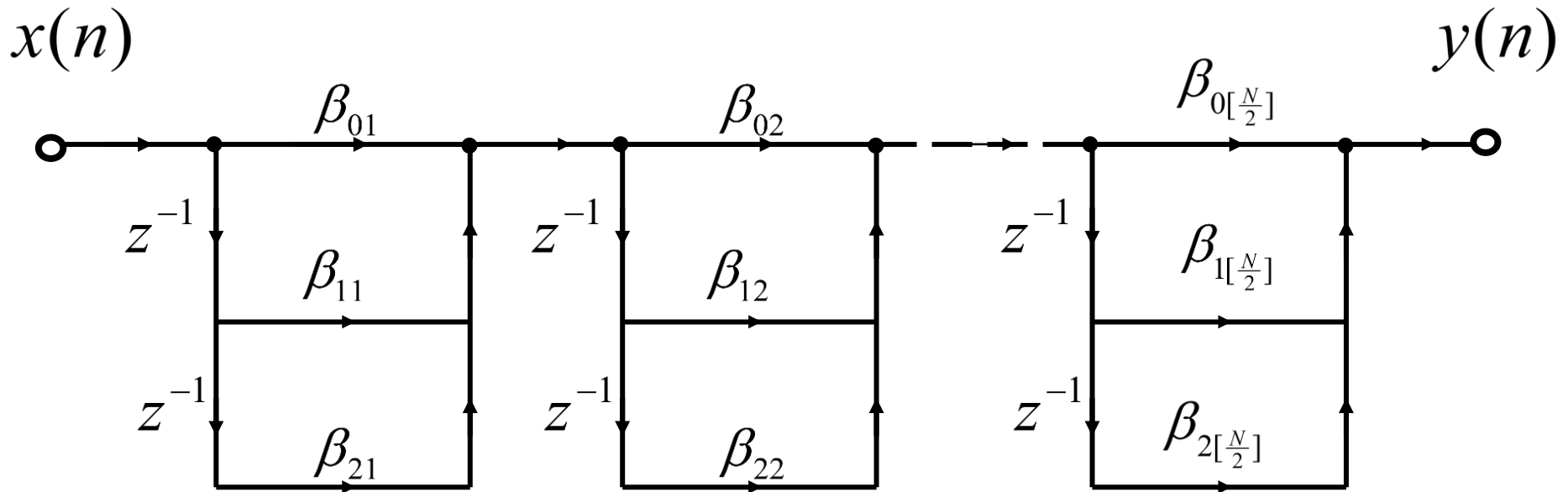
将系统函数分解为二阶因子的乘积形式：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

- **$\lceil N/2 \rceil$ 表示取N/2的整数部分。**

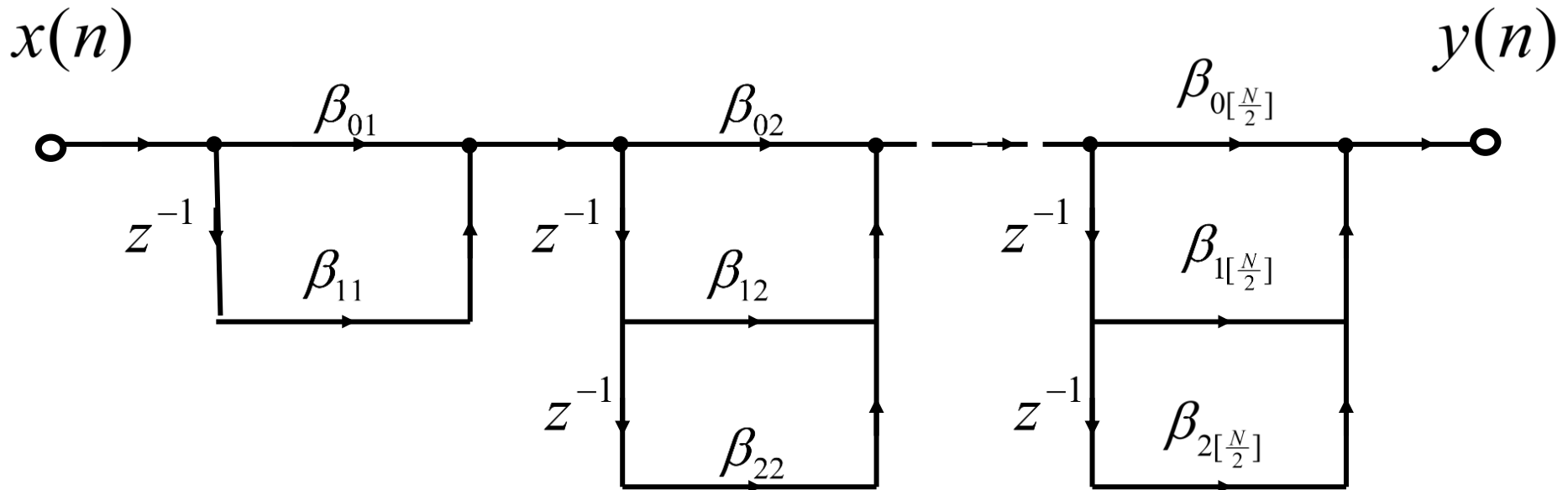
- **N**为偶数时**FIR**滤波器的级联型结构如图所示。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$



- **N**为奇数时**FIR**滤波器的级联型结构如图所示。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$



$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

- 每一节子系统控制一对零点；
- 故，如果需要准确控制系统的零点，可以采用该级联结构；
- 此结构所需要的系数比横截型要多，所需要的乘法次数也要多。



三、频率抽样型

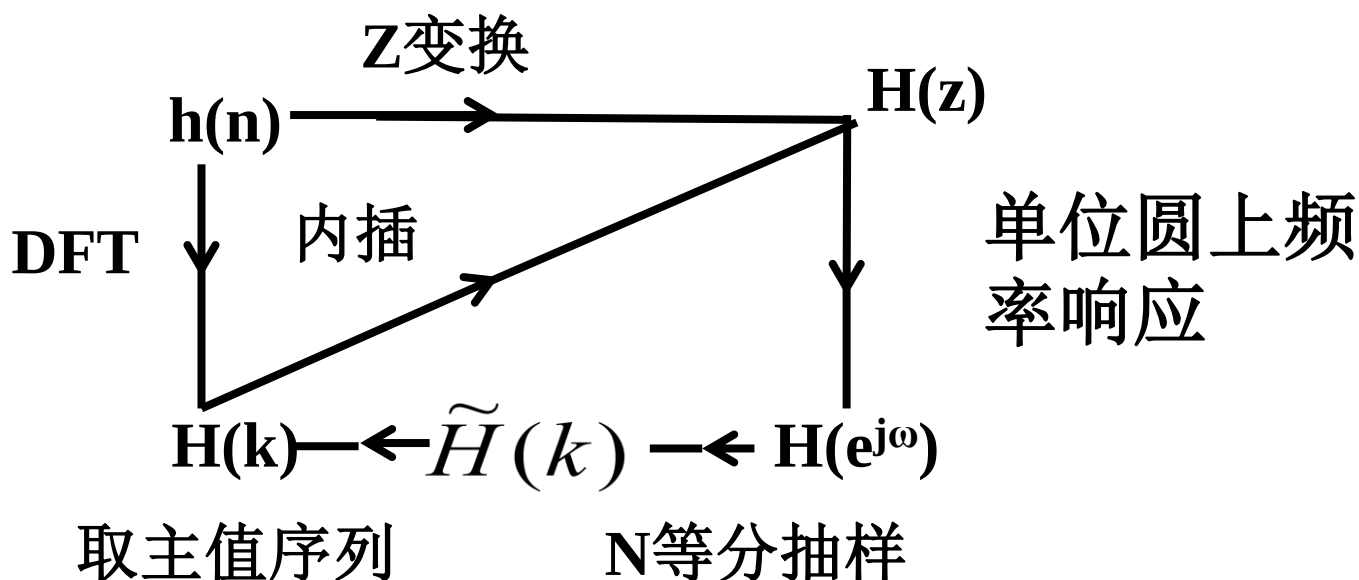
回忆，第三章（P146）

→ 一个N点有限长序列h(n)的z变换H(z)在单位圆上作N等分抽样，得到该有限长序列的周期延拓序列的频谱 $\tilde{H}(k)$ ，其主值序列就是h(n)的DFT，H(k)

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



一个N点有限长序列 $h(n)$ 与其z变换 $H(z)$ 、
傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 、傅里叶级数系数 $\tilde{H}(k)$
和离散傅立叶变换 $H(k)$ 的关系：



$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



$$= \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$$

其中：

$$H_c(z) = 1 - z^{-N}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$$

- 频率抽样结构由 $H_c(z)$ 和 $\sum_{k=0}^{N-1} H'_k(k)$ 级联而成。
- 第一部分： $H_c(z) = 1 - z^{-N}$
 - **FIR**子系统，由**N**节延时单元构成的梳状滤波器。

令， $H_c(z) = 1 - z^{-N} = 0$

求出零点，

$$z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$



即， $H_c(z)$ 在单位圆上有**N**个等间隔角度的零点，
其频率响应为：

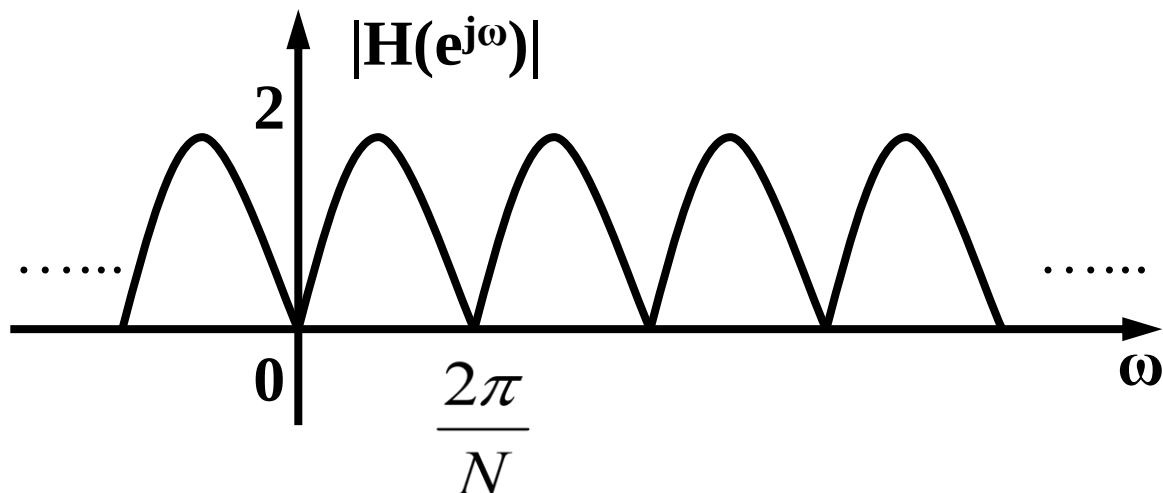
$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin(\frac{\omega N}{2})$$

幅度响应为, $|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right|$

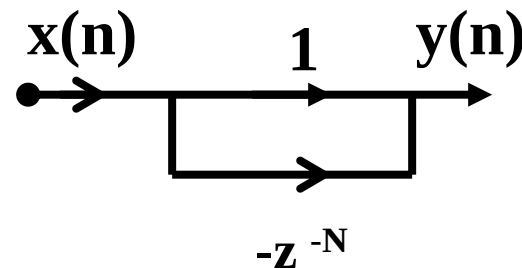
相角为,

$$\arg[H_c(e^{j\omega})] = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega N}{2} + m\pi, \begin{cases} m = 0, \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{N}\right] \\ m = 1, \omega \in \left[\frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}\right] \\ m = m, \omega \in \left[\frac{2m\pi}{N}, \frac{2(m+1)\pi}{N}\right] \end{cases}$$

幅频曲线



梳状滤波器信号流图



$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$$

第二部分为，

$$\sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

由N个一阶网络并联构成，称为谐振器

$$H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

求极点，

$$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

该极点正好与梳状滤波器的一个零点 ($i=k$) 相抵消。即, 当 $i=k$ 时,

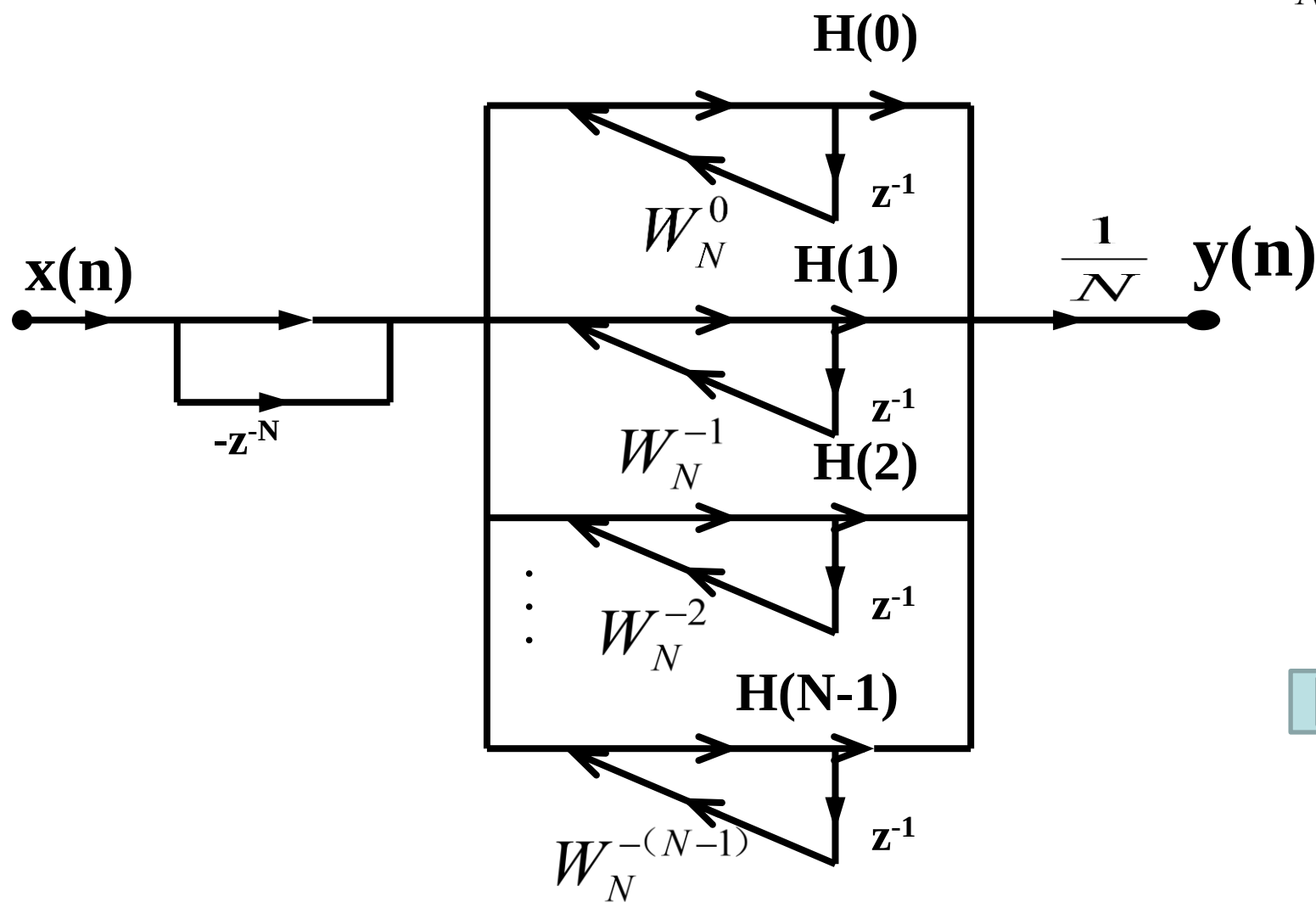

$$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H(k)$$

N个谐振器的**N**个极点和梳状滤波器的**N**个零点相互抵消, 故, 在这**N**个抽样频率点上, 频率响应和**H(k)**相等。

$$H(e^{j\omega}) = H(k), \omega = \frac{2\pi}{N}k, k = 0, 1, \dots, N-1$$

频率抽样型结构流程图

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



FIR滤波器的频率抽样型结构特点

- 控制滤波器的频率响应很方便，因为系数 $H(k)$ 就是滤波器在 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 处的频率响应。
- 系数 $H(k)$ 和 W_N^{-k} 都是复数，增加了乘法次数和存储量；
- 所有极点都是单位圆上，当系数 W_N^{-k} 量化时，极点移动，有些极点就不能和零点抵消（零点由延时单元确定，不受量化影响）。
- 如果极点移到单位圆外，则系统不稳定。



如何解决此问题（系数量化后可能不稳定）？

→ 将所有的零极点都移到单位圆内靠近单位圆的圆上。

设新单位圆的半径为 r ，（ r 小于但近似等于**1**）。
则频率抽样结构的系统函数为：

$$H(z) = \frac{(1 - r^N z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

$H(k)$ 为新抽样点上的抽样值,

$$\because r \approx 1$$

$$\therefore H_r(k) = H(z) \big|_{z=rW_N^{-k}} \approx H(z) \big|_{z=W_N^{-k}} H(k)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{(1 - r^N z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k} z^{-1}}$$



可以对此式进行简化，化简为 $[\frac{N+1}{2}]$ 个二阶的谐振滤波器。结构图如图**5-24**所示。

→ 推导过程参见书**P212-P213**。不作要求。

四、快速卷积结构

- 快速卷积， 即利用**DFT**来求卷积。
- 条件： $L \geq N_1 + N_2 - 1$
- 步骤为：

(1) 将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 延长至L点

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

(2) 求 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的L点DFT

$$X(k) = DFT[x(n)], \quad L\text{点}$$

$$H(k) = DFT[h(n)], \quad L\text{点}$$

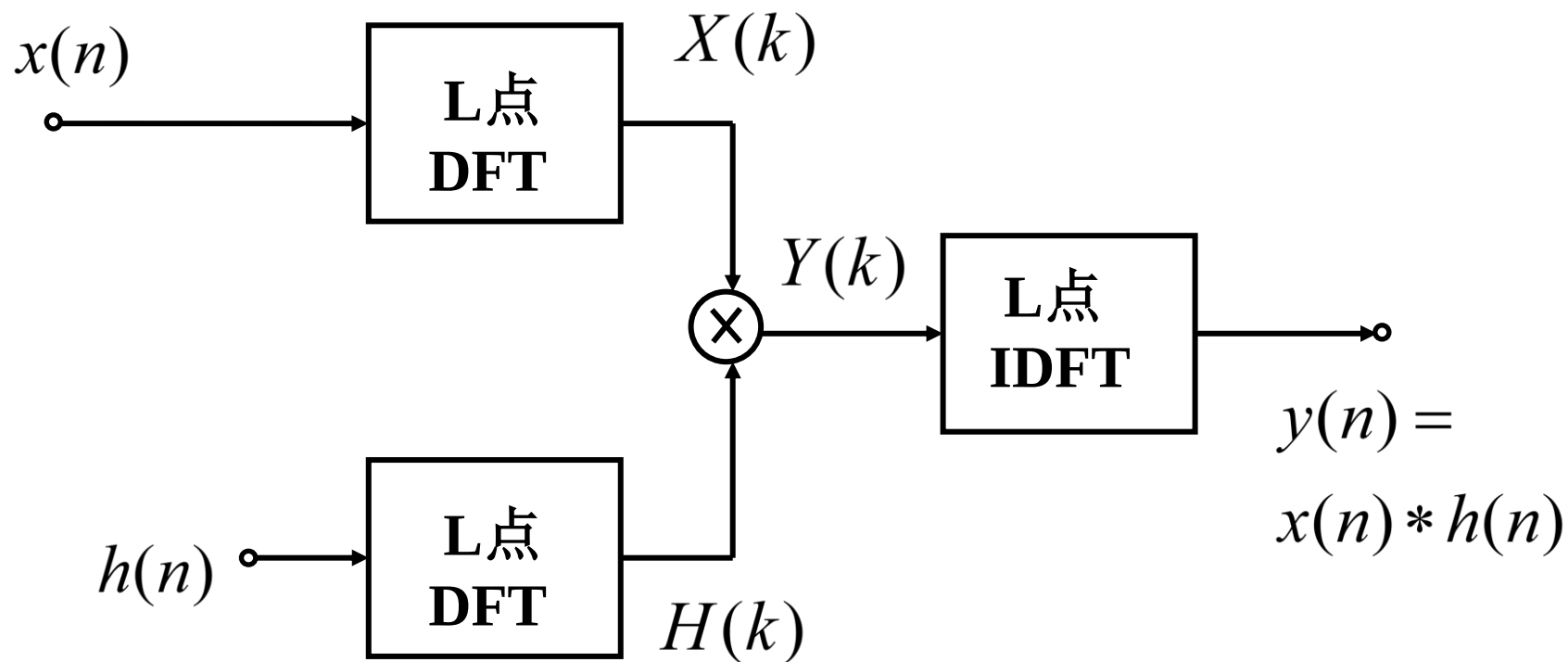
(3) 将 $X(k)$ 和 $H(k)$ 相乘, 得到 $Y(k)$

$$Y(k) = X(k)H(k), \quad L\text{点}$$

(4) 求 $Y(k)$ 的IDFT, 即为 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的
线性卷积。

$$y(n) = IDFT[Y(k)] = x(n) * h(n), \quad 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

FIR滤波器的快速卷积结构



五、线性相位FIR滤波器的结构

- 线性相位：滤波器对不同频率的正弦波所产生的相移和正弦波的频率成正比。
- 在数据传输、图像处理等领域都要求系统具有线性相位特性。
- **FIR**滤波器的单位冲激响应为有限长，在满足一定条件时，就具有线性相位特性。
- 线性相位系统对所有的频率点不会产生失真。

- 如果**FIR**滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 为实数，且满足：

偶对称： $h(n) = h(N-1-n)$

奇对称： $h(n) = -h(N-1-n)$

- 则，**FIR**滤波器就具有严格的线性相位

→ 证明在第七章。

求线性相位FIR的结构

(1) 当N为奇数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

对第三个式子做变量置换： **$n=N-1-m$** ，并将 **m** 换回 **n** ，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$



代入线性相位奇偶对称条件，有



$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

式中，

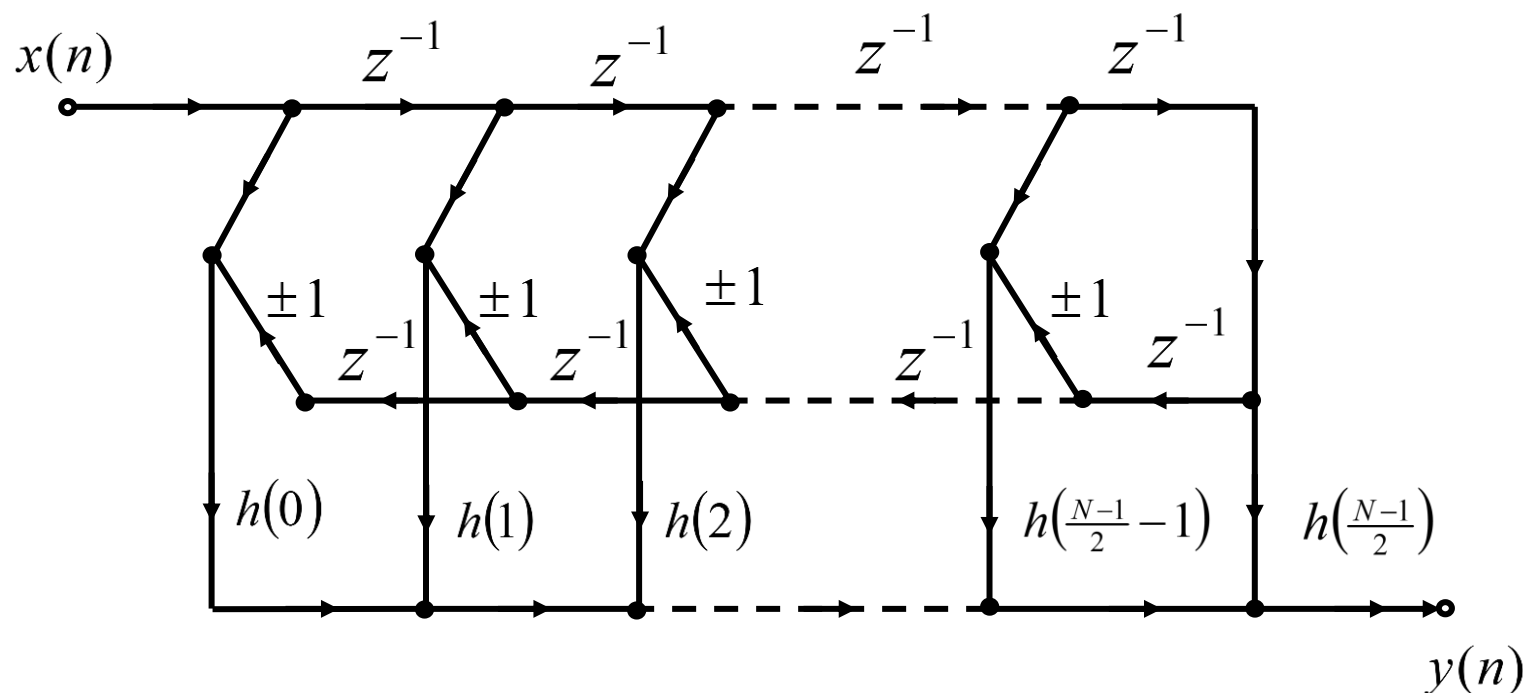
“+”表示 $h(n)$ 是偶对称，

“−”表示 $h(n)$ 是奇对称

奇对称时，必有： $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

N为奇数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$



$h(n)$ 偶对称时 “ $\pm$ ” 取+

$h(n)$ 奇对称时 “ $\pm$ ” 取-, 且 $h(\frac{N-1}{2}) = 0$

(2) 当N为偶数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

对第二个式子，令 $n=N-1-m$ ，并将 m 换回 n ，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

代入线性相位奇偶对称条件，有

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$

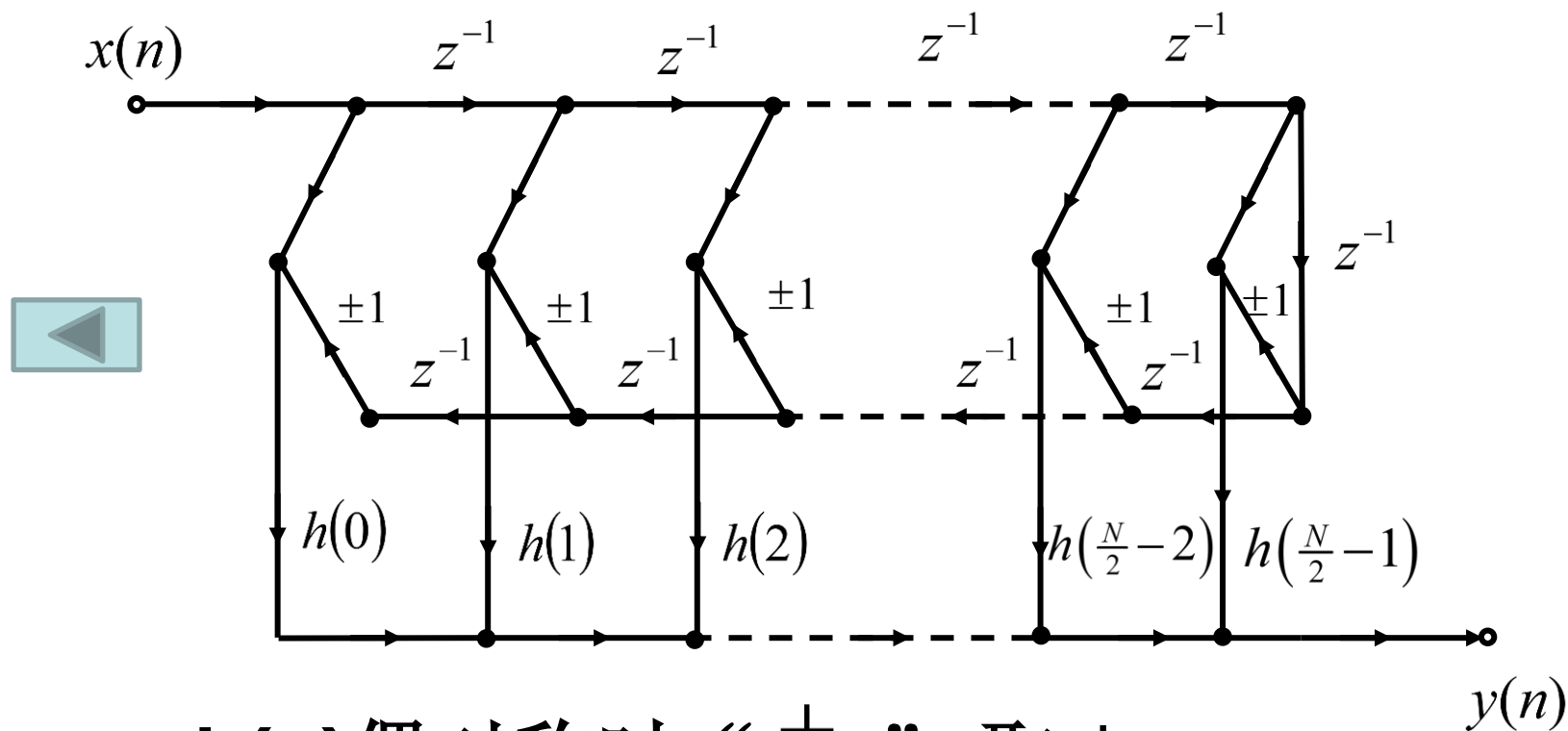
式中，

“+”表示 $h(n)$ 是偶对称，

“-”表示 $h(n)$ 是奇对称

N为偶数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$



$h(n)$ 偶对称时 “ $\pm$ ” 取+
 $h(n)$ 奇对称时 “ $\pm$ ” 取-

线性相位FIR滤波器的直接型结构的特点

→ 比一般直接型节省一半数量的乘法运算！

格型滤波器 → 不要求！