22-23年数字信号处理期末考试

一、填空题：（本大大题共18小题，每个空格1分，共30分）

1. 设某个离散时间系统为$y(n)=T[x(n)]=2x(n)+a\sin(2\pi(n+2))$，其中$a\neq 0$为实数，问该系统是否是线性系统？（），是否移不变系统？（），是否因果系统？（），是否稳定系统？（）。

   答案：线性、移不变、因果、稳定

2. 已知一个因果序列$x(n)$的z变换为$X(z)=\frac{0.6+z^{-1}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}$，求序列$x(n)$的初值$x(0)$为（），终值$x(\infty)$为（）。

   答案：0.6，不存在

3. 一个线性移不变系统的系统函数和该系统的逆系统的系统函数的乘积为（）。

   答案：1

4. 一个线性移不变系统的单位采样响应满足$h(n)=h(N-1-n)$，N为偶数，采用窗函数设计法，可以设计（）（低通/高通/带通/带阻）类型的滤波器。

   答案：低通和带通

5. $x(n)=n2^nu(n)$，则$X(z)=$（），收敛域为（）。

   答案：$\frac{2z}{(z-2)^2}$，$|z|>2$

6. 一个IIR数字滤波器，如果要灵活地调整该滤波器的某些极点，而不影响到其他极点和零点，可以采用（）（典范型/级联型/并联型）形式的结构？

   答案：级联型或并联型

7. 知$x(n)=A\sin(\frac{2}{13}\pi n+\frac{\pi}{2})$，判断该序列是否是周期性的（），如果是周期性的，试确定其周期（）。

   答案：是，13

8. 设$x(n)=\{1,1,-1,-2;n=0,1,2,3\}$，$x_2(n)=x((n+2))_6R_6(n)=$（）。

   答案：$\{-1,-2,0,0,1,1;n=0,1,2,3,4,5\}$

9. 以下哪种计算是错误的（）。

   (A) $W_N^{nk}=W_N^{n(k+N)}$

   (B) $(W_N^{nk})^*=W_N^{-nk}$

   (C) $W_N^{nk}=W_{mN}^{nmk}$

(D) $W_N^{nk} = W_N^{(n+m)k}$

答案：D

10. 假设信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的最高频率分别为$20\mathrm{kHz}$和$30\mathrm{kHz}$，对信号$x_1(t)\cdot x_2(t)$，$x_1(t)*x_2(t)$进行理想抽样，其离散时间信号能不失真恢复原信号的最小抽样频率分别为（）、（）。

答案：$100\mathrm{kHz}$、$40\mathrm{kHz}$

11. 一个有限长序列$x(n)$的傅立叶变换$X(e^{j\omega})$是数字频率ω的（）。

(A) 连续的周期函数

(B) 离散的周期函数

(C) 连续的非周期函数

(D) 离散的非周期函数

答案：A

12. 设有一谱分析用的信号处理器，抽样点数必须为2的整数次幂，要求频率分辨力$\leq 10\mathrm{Hz}$，信号最高频率为$5\mathrm{kHz}$，试确定最小记录长度为（）；抽样周期最大间隔为（）；在一个记录中的点数为（）。

答案：$0.1\mathrm{s}$，$100\mu\mathrm{s}$，1024

13. 已知一个线性相位FIR数字滤波器的一个零点为：$1-2j$，则该系统其他零点为（）（）（）。

答案：$1+2j$，$\frac{1}{1-2j}$，$\frac{1}{1+2j}$

14. 采用双线性变换法将模拟低通滤波器映射变换为数字低通滤波器，其数字频率ω与模拟角频率Ω是（）（线性/非线性）关系。

答案：非线性

15. 一个线性移不变系统的差分方程如下所示，该系统是否具有严格的线性相位性质（），其群延时为（）。

$y(n) = x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2) + 4x(n-3) + 2x(n-4) + 3x(n-5) + x(n-6)$

答案：是，3

16. 一个离散时间信号$x(n)$输入到一个单位抽样响应为$h(n)$的线性移不变系统，系统输出信号$y(n)$的z变换$Y(z)$与$x(n)$的z变换$X(z)$和$h(n)$的z变换$H(z)$的关系为（）。

答案：$Y(z) = X(z)H(z)$

17. 以下关于线性移不变数字滤波器的陈述，正确的是（）。

(A) 数字滤波器输出的频率成分必定比输入的频率成分少；

(B) 数字滤波器只能输出低频信号；

(C) 数字滤波器输出的频率成分可以多于输入的频率成分；

(D) 数字滤波器输出的频率成分可以与输入的频率成分一样多，或者少于输入的频率成分。

答案：D

18. 一个序列$x(n), 0 \le n \le N-1$，先将其补零到长度为L点（$L > N$），问其频谱与原信号的频谱相比是否变化？（）

答案：不变化，或者频谱包络没变化

二、判断对错题：(本大题共10小题，每小题1分，共10分)

1. 不管抽样频率的大小如何，将一个连续时间信号抽样变成一个离散时间信号，其离散时间信号的傅里叶变换不一定是一个周期信号。

   答案：错

2. 从模拟滤波器设计数字滤波器的数字频域频带变换方法，其频带变换函数一定为一个全通函数。

   答案：对

3. 用窗函数设计法设计FIR线性相位数字滤波器时，改变窗函数的类型可以改变阻带最小衰减的大小。

   答案：对

4. 基-2时间抽取法（DIT）FFT算法的效果与基-2频率抽取法（DIF）FFT算法的效果是一样的。

   答案：对

5. 将一个连续时间序号抽样变成一个离散时间信号，其模拟角频率Ω和数字频率ω不一定是线性关系。

   答案：错

6. 用窗函数设计法设计FIR线性相位数字滤波器是在频域中进行设计的。

   答案：错

7. 一个离散时间信号$x(n)$，当n不是整数时，$x(n)$没有任何意义。

   答案：对

8. 一个线性时不变离散系统是稳定系统的充分必要条件是：系统函数$H(z)$的极点在圆内。

   答案：错

9. 相位延迟（滞后）系统的系统函数的零点可以在单位圆内，也可以在单位圆外。

   答案：对

10. 全通滤波器的系统函数的极点数目和零点数目不一定一样多。

答案：错

三、证明题：（本大题共2小题，每小题5分，共10分）

1. 从模拟滤波器设计IIR数字滤波器的变换方法之一是冲激响应不变法，其变换关系为$z=e^{sT}$，其中，T是抽样周期，试证明该变换关系满足模拟滤波器变换到数字滤波器的二个基本条件，即：1）s平面的虚轴映射为z平面的单位圆；2）s平面的左半平面映射为z平面的单位圆内。

   证明：

   变换关系为$z=e^{sT}$，设：$z=re^{j\omega}$，$s=\sigma+j\omega$

   代入$z=e^{sT}$，有：$re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma}\cdot e^{j\Omega T}$，$r=e^{\sigma T}$，$\omega=\Omega T$

   1）当$\sigma=0$时，对应于s平面的虚轴，此时，$r=1$时，对应于z平面的单位圆；

   2）当$\sigma<0$时，对应于s平面的左半平面，此时，$r<1$时，对应于z平面的单位圆内。

   故该变换关系满足模拟滤波器变换到数字滤波器的二个基本条件。证毕。

2. 证明系统$H(z)=\frac{z^{-2}-0.1z^{-1}-0.2}{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$是一个全通系统。

   证明：

   $$H(z)=\frac{z^{-2}-0.1z^{-1}-0.2}{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}=\frac{(z^{-1}-0.5)(z^{-1}+0.4)}{(1-0.5z^{-1})(1+0.4z^{-1})}$$

   系统函数的极点为：0.5，-0.4；系统函数的零点为：2，-2.5；

   极点均在单位圆内，零点在单位圆外，且零点极点关于单位圆镜像对称，故该系统是一个全通系统。

四、计算题：（本大题共5小题，每小题10分，共50分）

1. 一个稳定的线性移不变系统的差分方程描述为

   $$y(n)-0.5y(n-1)-0.06y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)$$

   （1）求系统函数$H(z)$，并求出其零极点；

   （2）指出系统的收敛域，并判定系统的因果性；

   （3）求系统的单位采样响应$h(n)$；

   （4）画出系统的级联结构图和并联结构图（以一阶基本节表示）。

   解：

   （1）（2分）对差分方程两端进行z变换，可得

   $$Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)-0.06z^{-1}Y(z)=X(z)-0.5z^{-1}X(z)$$

   经整理后，得

   $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}-0.06z^{-2}}=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1+0.1z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

极点为$z_1=-0.1$，$z_2=0.6$；零点为$z_1=0$，$z_2=0.5$。

（2）（2分）由于该系统是稳定系统，因此收敛域包括单位圆，故收敛域为$|z|>0.6$，所以该系统是因果系统。

（3）（3分）$H(z)$进行部分分式分解后得

$$H(z)=\frac{\frac{6}{7}}{1+0.1z^{-1}}+\frac{\frac{1}{7}}{1-0.6z^{-1}}$$

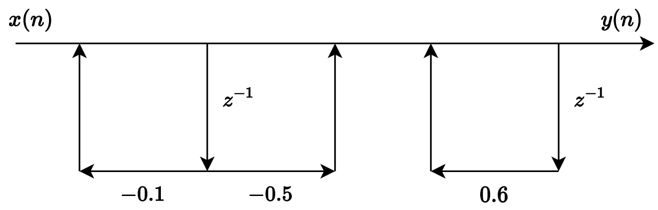
因此可求得该系统的单位抽样响应为

$$h(n)=\frac{6}{7}(-0.1)^n u(n)+\frac{1}{7}(0.6)^n u(n)$$

（4）（3分）系统函数为

$$H(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1+0.1z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

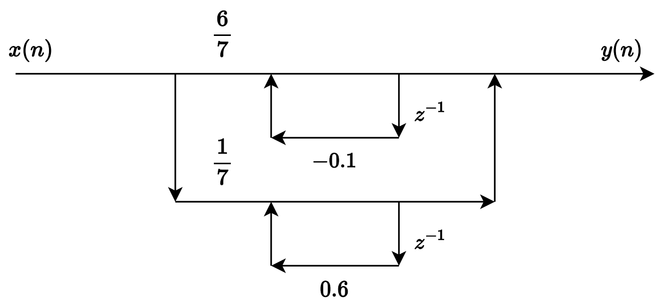
故级联结构图为：



系统函数为

$$H(z)=\frac{\frac{6}{7}}{1+0.1z^{-1}}+\frac{\frac{1}{7}}{1-0.6z^{-1}}$$

故并联结构图为：



2. 设两个有限长序列分别为：

$$x(n)=\cos(0.5n\pi)[u(n)-u(n-5)]$$
$$h(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+3\delta(n-2)$$

（1）求序列$x(n)$和$h(n)$具体数值；

（2）求线性卷积$x(n)*h(n)$；

（3）求循环卷积$x(n)⑥h(n)$；

（4）求循环卷积$x(n)⑧h(n)$；

解：

（1）（2分）$x(n)=\{1,0,-1,0,1;n=0,1,2,3,4\}$，$h(n)=\{2,1,3;n=0,1,2\}$

（2）（3分）利用相乘相加法求线性卷积：

$$x(n) * h(n) = \{2, 1, 1, -1, -1, 1, 3; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

（3）（3分）长度为6的循环卷积：

利用圆周卷积是线性卷积以6点为周期的周期延拓序列的主值序列，即

6点圆周卷积$x(n)⑥h(n)$为

$$x(n)⑥h(n) = \left\{\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+6r)\right\} R_6(n)$$

故有1个重叠，即第1个点：$2+3=5$；

6点圆周卷积：

$$x(n)⑥h(n) = \{5, 1, 1, -1, -1, 1; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

（4）（2分）长度为8的循环卷积：

$$x(n)⑧h(n) = \{2, 1, 1, -1, -1, 1, 3, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

3. 基2频率抽取FFT算法中，回答下列问题：

（1）对输入序列$x(n)$是如何分组的？其特点是什么？

（2）画出4点基2频率抽取FFT流图；

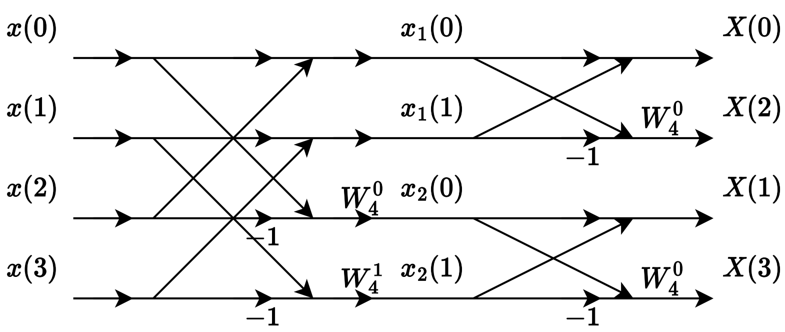
（3）利用该4点FFT流图计算$x(n) = \{2, 1, -1, 2; n = 0, 1, 2, 3\}$的DFT $X(k)$；

解：

（1）（2分）基2频率抽取FFT算法对输入序列是按照前后分组的，即前一半分成一组，后一半分成一组。

其特点是：（a）输入自然顺序，输出倒位序；（b）可以原位运算；（c）能极大提高DFT的计算速度；

（2）（4分）4点基2频率抽取FFT流图如下：



（3）（4分）$x(n) = \{2, 1, -1, 2; n = 0, 1, 2, 3\}$的DFT如下：

$$
\begin{aligned}
&x_1(0)=x(0)+x(2)=2+(-1)=1\\
&x_1(1)=x(1)+x(3)=1+2=3\\
&x_2(0)=[x(0)-x(2)]W_4^0=(2+1)\cdot 1=3\\
&x_2(1)=[x(1)-x(3)]W_4^1=(1-2)\cdot(-j)=j\\
&X(0)=x_1(0)+x_2(1)=1+3=4\\
&X(2)=[x_1(0)-x_1(1)]W_4^0=(1-3)\cdot 1=-2\\
&X(1)=x_2(0)+x_2(1)=3+j\\
&X(3)=[x_2(0)-x_2(1)]W_4^0=(3-j)\cdot 1=3-j
\end{aligned}
$$

$$\therefore X(k)=\{4,3+j,-2,3-j;k=0,1,2,3\}$$

4. 线性移不变因果系统的差分方程

$$y(n)=-0.9y(n-1)-0.18y(n-2)+x(n)-0.4x(n-1)$$

（1）求系统的频率响应$H(e^{j\omega})$的表达式

（2）采用几何作图法判断该系统是什么类型的数字滤波器（低通、高通、带通、带阻、全通）？

解：

（1）（4分）对差分方程两边求z变换，有：

$$Y(z)=-0.9z^{-1}Y(z)-0.18z^{-2}Y(z)+X(z)-0.4z^{-1}x(z)$$

系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-0.4z^{-1}}{1+0.9z^{-1}+0.18z^{-2}}=\frac{z(z-0.4)}{(z+0.6)(z+0.3)}$$

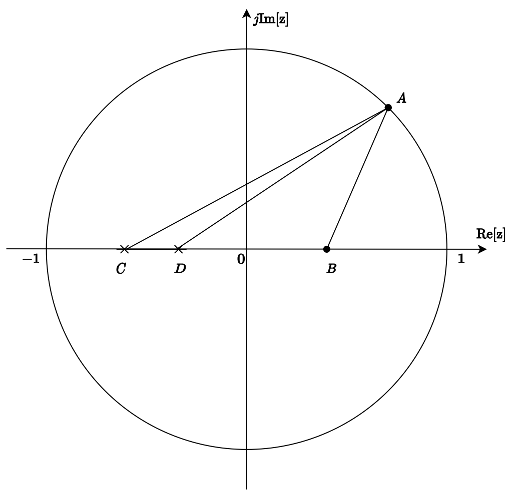
系统的频率响应为：

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}(e^{j\omega}-0.4)}{(e^{j\omega}+0.6)(e^{j\omega}+0.3)}$$

（2）幅度谱为：

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{|e^{j\omega}-0.4|}{|e^{j\omega}+0.6||e^{j\omega}+0.3|}=\frac{AB}{AC\times AD}$$

如下图所示。



当$\omega=0$时，A点位于右横轴与单位圆交点上，AB取最小值，AC、AD取最大值，故$|H(e^{j\omega})|$取最小值；

当$\omega=\pi$时，A点位于左横轴与单位圆交点上，AB取最大值，AC、AD取最小值，故$|H(e^{j\omega})|$取最大值；

当ω从0变化到π时，AB从最小值变化到最大值，AC、AD从最大值变化到最小值，故$|H(e^{j\omega})|$从最小值变化到最大值；

故：$|H(e^{j\omega})|$体现出高通滤波器的幅度特性，也即，该系统是高通滤波器。

5. 采用窗函数设计法设计一个线性相位FIR高通滤波器，抽样频率为40kHz，阻带截止频率为8kHz，通带开始频率为10kHz，阻带衰减不少于-40dB。

窗函数	表达式	过渡带宽$\Delta\omega$ / $(2\pi/N)$	阻带最小衰减 / dB
矩形窗	$R_N(n)$	0.9	-21
三角窗	$w(n)=\begin{cases}\frac{2n}{N-1}, & 0\le n\le \frac{N-1}{2}\\ 2-\frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2}\le n\le N-1\end{cases}$	2.1	-25
汉宁窗	$w(n)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$	3.1	-44
海明窗	$w(n)=\left[0.64-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$	3.3	-53

解：

（1）（2分）求对应的数字频率

阻带截止频率：

$$\omega_p=\frac{\Omega_p}{f_s}=2\pi\cdot\frac{\Omega_p}{\Omega_s}=2\pi\cdot\frac{8}{40}=0.4\pi$$

通带开始频率：

$$\omega_{st}=\frac{\Omega_{st}}{f_s}=2\pi\cdot\frac{\Omega_{st}}{\Omega_s}=2\pi\cdot\frac{10}{40}=0.5\pi$$

阻带衰减：

$$\delta_2=40\text{dB}$$

（2）（4分）理想高通滤波器的通带开始频率：

$$\omega_c\approx\frac{1}{2}(\omega_p+\omega_{st})=0.45\pi$$

故，理想低通滤波器的频率响应为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau}, & \omega_c\le|\omega|\le\pi\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{-\omega_c}e^{j\omega(n-\tau)}\mathrm{d}\omega+\int_{\omega_c}^{\pi}e^{j\omega(n-\tau)}\mathrm{d}\omega]$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi(n-\tau)}\{\sin[(n-\tau)\pi]-\sin[(n-\tau)\omega_c]\}, & n\neq\tau\\ \frac{1}{\pi}(\pi-\omega_c)=1-\frac{\omega_c}{\pi}, & n=\tau\end{cases}$$

（3）（3分）由阻带衰减确定窗形状、过渡带确定N

由于阻带衰减：

$$\delta_2=40\mathrm{dB}$$

查表可知，选用汉宁窗满足要求。

汉宁窗：

$$\Delta\omega=3.1\cdot\frac{2\pi}{N}$$

而过渡带宽：

$$\Delta\omega=\omega_{st}-\omega_p=0.5\pi-0.4\pi=0.1\pi$$

求出：

$$N=3.1\cdot\frac{2\pi}{\Delta\omega}=\frac{6.2\pi}{0.1\pi}=62$$

延时：

$$\tau=\frac{N-1}{2}=\frac{62-1}{2}=30.5$$

故：

$$W(n)=\frac{1}{2}[1-\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)=\frac{1}{2}[1-\cos(\frac{2\pi n}{61})]R_N(n)$$
$$h_d(n)=\frac{1}{\pi(n-30.5)}\{\sin[(n-30.5)\times\pi]-\sin[(n-30.5)\times0.45\pi]\}$$

（4）（1分）求出FIR滤波器的单位冲激响应$h(n)$

$$h(n)=h_d(n)\cdot W(n)$$

（5）（1分）验算