第 五 章

数字滤波器的基本结构

学习目标

- 理解数字滤波器结构的表示方法
- 掌握IIR滤波器的基本结构
- 掌握FIR滤波器的基本结构

本章内容

5.1 无限长单位冲激响应（**IIR**）系统和有限长单位冲激响应（**FIR**）系统

5.2 数字滤波器结构的表示方法

5.3 无限长单位冲激响应（**IIR**）滤波器的基本结构

5.4 有限长单位冲激响应（**FIR**）滤波器的基本结构

5.1 无限长单位冲激响应（IIR）系统和有限长单位冲激响应（FIR）系统

一个线性移不变系统，三种表示方法

卷积 $$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h(n-m)$$

系统函数 $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

差分方程 $$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)$$

三种表示方法整理

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

数字系统的两种形式：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

1. 若系统的单位抽样（冲激）响应 h(n) 延伸到无穷长($-\infty < n < \infty$)，则称为无限长单位冲激响应 (Infinite Impulse Response) 系统，简称IIR系统。

2. 若系统的单位抽样（冲激）响应 h(n) 是一个有限长序列 ($0 \le n \le N-1$)，则称为有限长单位冲激响应 (Finite Impulse Response) 系统，简称FIR系统。

系统函数归一化为：

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

如果分母多项式有一个系数 $a_k \neq 0$，则系统函数有极点，此时，系统为 **IIR**系统。

IIR系统有两种情况：

1. 分子只有常数项 b_0 ，系统函数在有限 z平面上只有极点，没有零点，称为全极点系统，或称为自回归系统（**AR, Auto-Regressive**系统）。

$$H(z)=\frac{b_0}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

2. 系统函数是一个有理式，在有限 z 平面上既有极点，也有零点，称为零极点系统，或称为自回归滑动平均系统（**ARMA, Auto-Regressive Moving Average**系统）。

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

1. 如果所有的系数 $a_k=0,(k=1,\cdots,N)$ **，则系统就是 FIR系统。** $H(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$

2. FIR系统在有限 z 平面上，只有零点，没有极点，称为全零系统，或者称为滑动平均系统（MA， Moving Average系统）。

注：有限z平面为： $0<|z|<\infty$

- **IIR系统可以用一个差分方程来表示**

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)+\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

- **当** $a_k \neq 0$ **，** $y(n)$ **与** $y(n-k)$ **和** $x(n-m)$ **均有关系，有反馈环路，此时，结构称为“递归型”结构**

- **FIR**系统可以用一个差分方程来表示

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

- $y(n)$ 只与 $x(n-m)$ 有关系，没有反馈环路，此时，结构称为“非递归型”结构

5.2 数字滤波器的基本结构

一、什么是数字滤波器

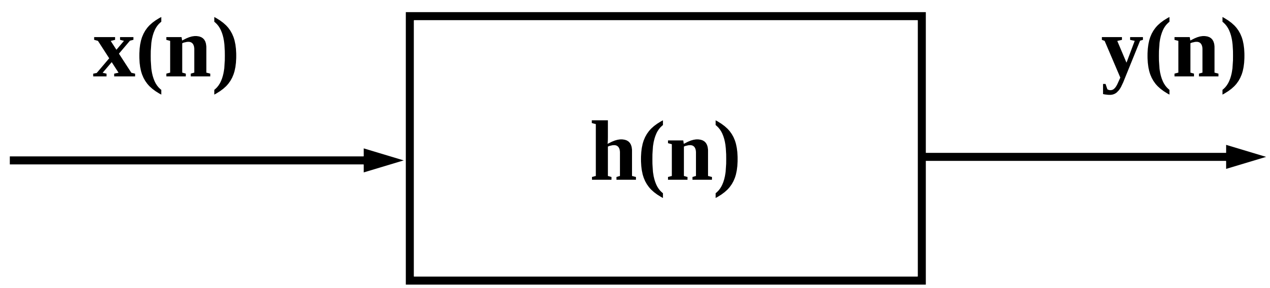
- 顾名思义：数字滤波器的作用是对输入信号起到滤波的作用；即，**DF(Digital Filter)** 是由差分方程描述的离散时间系统。
- 功能：把输入序列通过一定的运算变换成输出序列。不同的运算处理方法决定了滤波器的实现结构的不同。

二、数字滤波器的工作原理

设$x(n)$是系统的输入，$X(e^{j\omega})$是其傅氏变换。

$y(n)$是系统的输出，$Y(e^{j\omega})$是其傅氏变换。

则：



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

则线性移不变系统的输出为：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)x(m)=F^{-1}[X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]$$

输入序列的频谱$X(e^{j\omega})$经过滤波器$H(e^{j\omega})$后变成$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$，选取$H(e^{j\omega})$，使滤波器输出$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$符合我们的要求，反变换后得到系统的输出$y(n)$，这就是数字滤波器的工作原理。

三　数字滤波器的基本结构

一个数字滤波器，实质就是一个线性移不变系统，表示为，

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)$$

- 数字滤波器的功能就是把输入序列通过一定的算法，变换为所需的输出序列。
- 有两种方法来实现数字滤波器

  (1) 采用软件方法实现，在通用计算机上编制程序实现。

  (2) 采用硬件实现，即设计专用的数字硬件、专用的数字信号处理器或通用的数字信号处理器实现。

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)$$

数字滤波器的基本运算单元（3个）

- 加法器
- 单位延时
- 常数乘法器

数字滤波器的表示方法（2种）

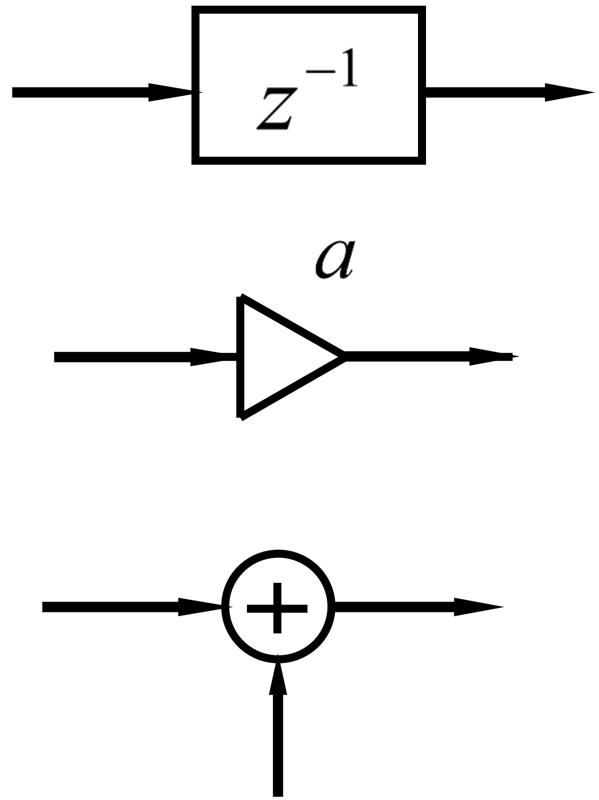
- 方框图法
- 信号流图法

基本运算单元的表示

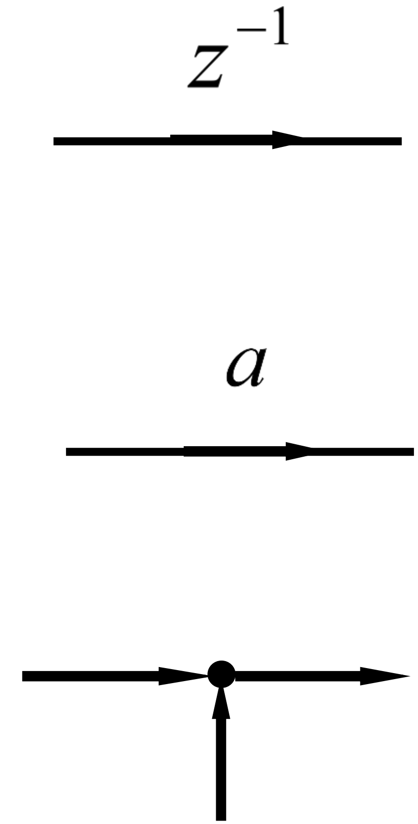
单位延时

乘常数

相加



方框图表示法

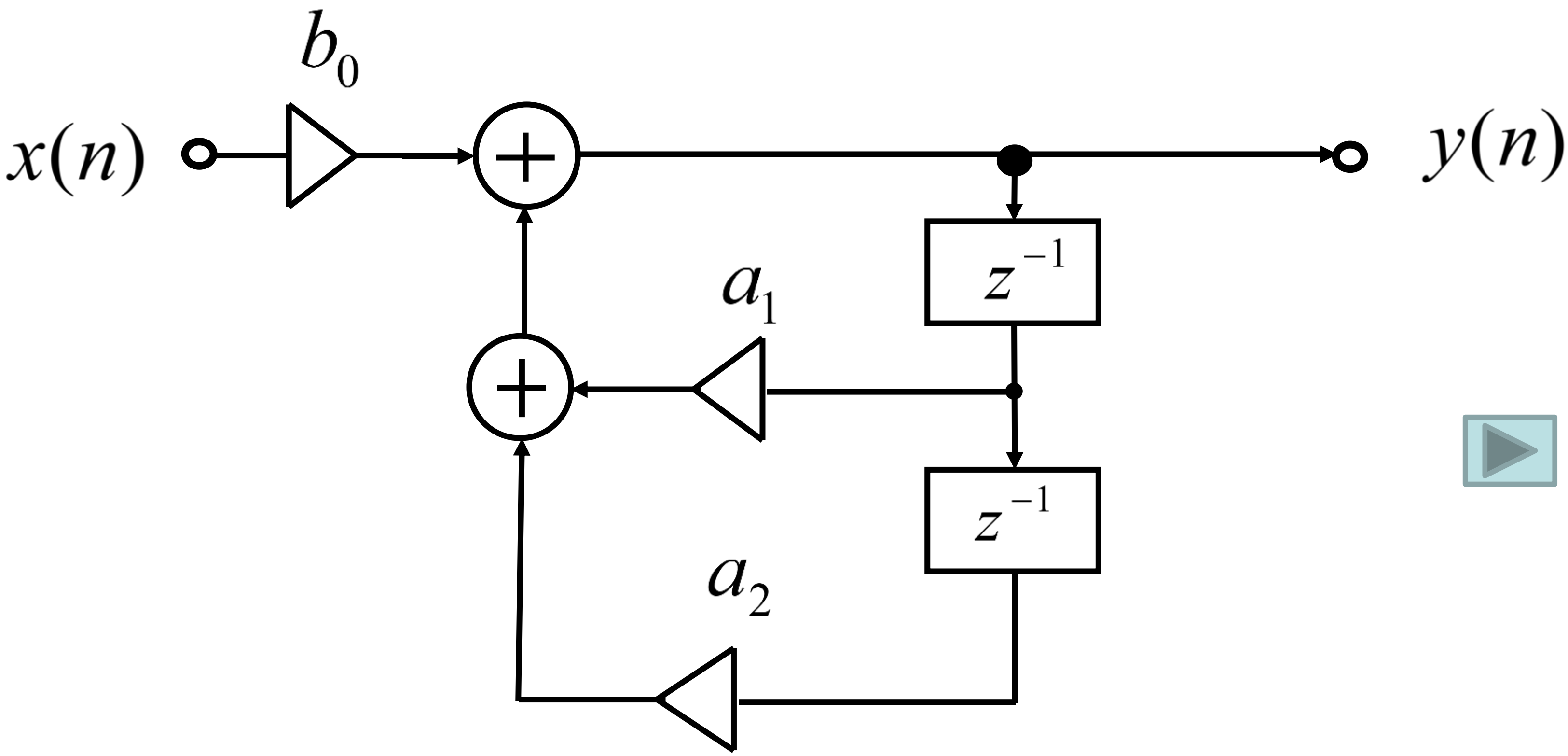


信号流图表示法

例如：一个二阶IIR数字滤波器

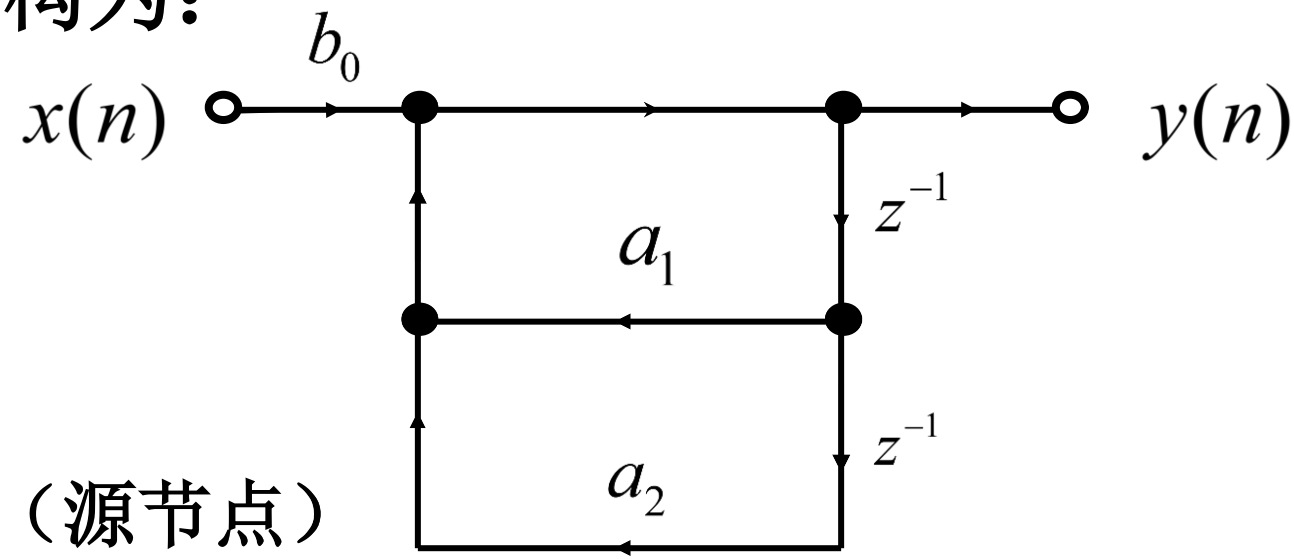
$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

其方框图结构为：

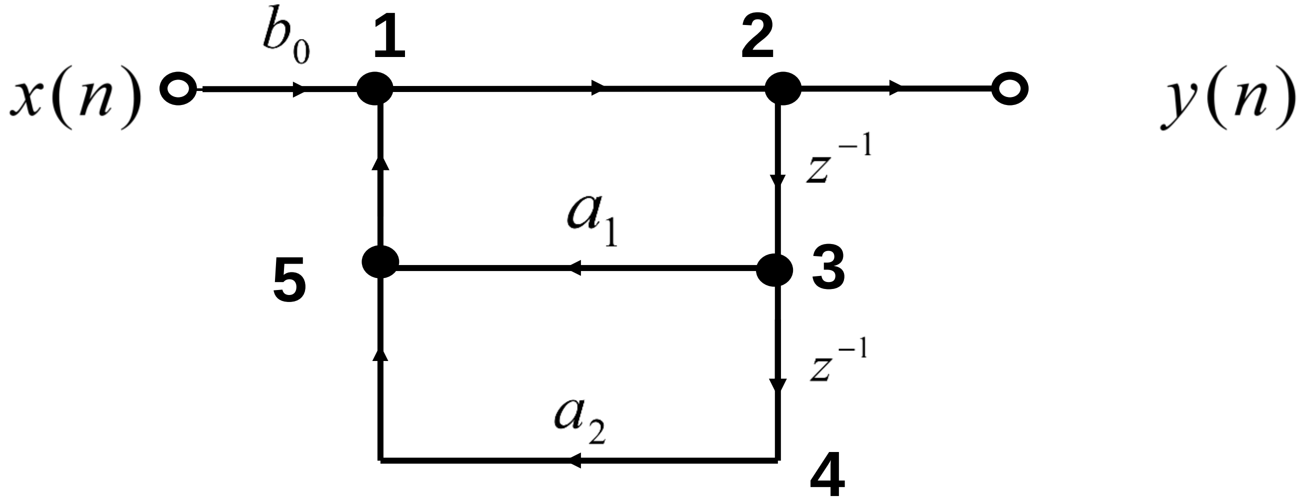


$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

其信号流图结构为：



- 网络节点
  - 输入节点（源节点）
  - 输出节点（阱节点）
  - 分支节点
- 节点值＝所有输入支路信号值之和
- 支路信号值＝起始节点信号值×传输系数



$$y(n) = w_2(n) = w_1(n)$$

$$w_3(n) = w_2(n-1) = y(n-1)$$

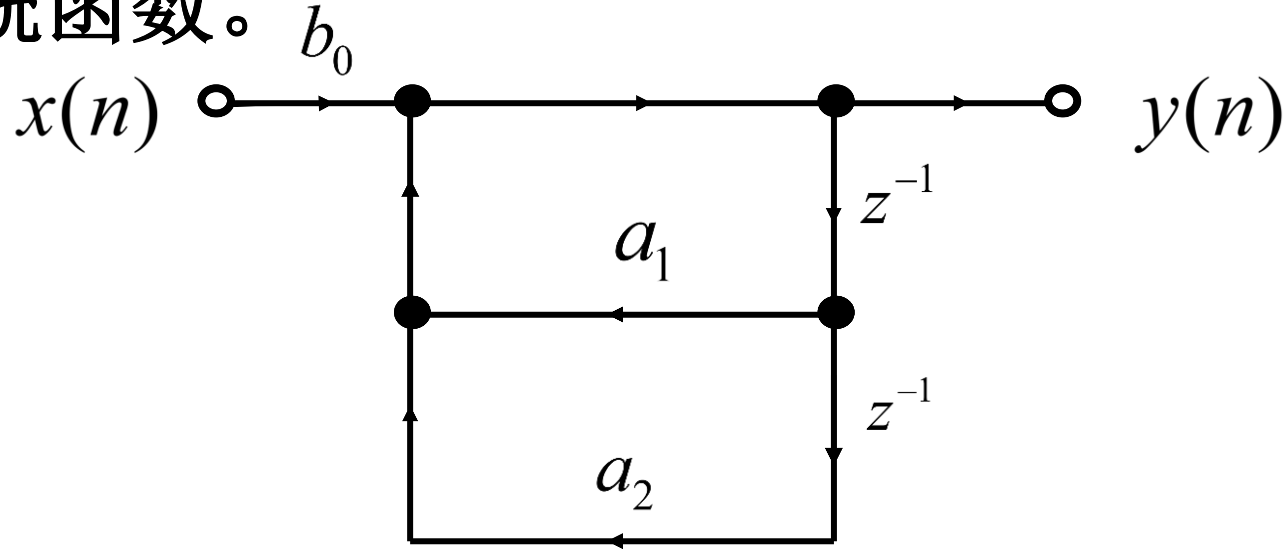
$$w_4(n) = w_3(n-1) = y(n-2)$$

$$w_5(n) = a_1 w_3(n) + a_2 w_4(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

$$w_1(n) = b_0 x(n) + w_5(n) = b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

$$y(n) = w_1(n) = b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

根据信号流图，可以直接写出系统的差分方程和系统函数。



$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

$$Y(z) = a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + b_0 X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

5.3 无限长单位冲激响应（IIR）滤波器的基本结构

无限长单位冲激响应（**IIR**）滤波器的特点：

1. 系统的单位冲激响应 $h(n)$ 是无限长的；
2. 系统函数 $H(z)$ 在有限 **z** 平面 $(0<|z|<\infty)$ 上有极点存在；
3. 递归型结构，存在输出到输入的反馈。

任何一个**IIR**系统函数的基本结构有四种类型

1. 直接**I**型
2. 直接**II**型
3. 级联型
4. 并联型

一、直接 I 型

考虑一个IIR滤波器的系统函数：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

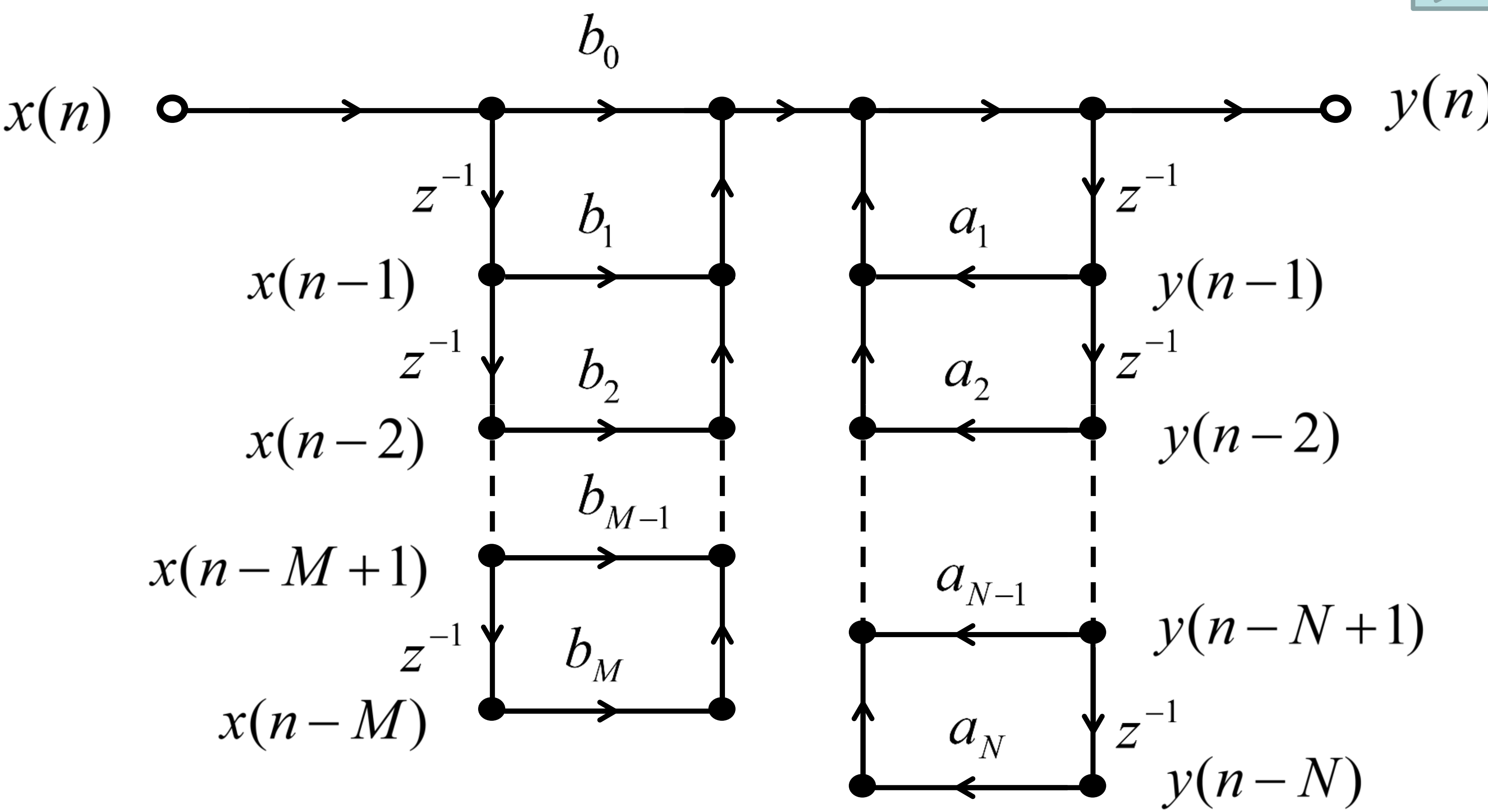
其系统输入输出的差分方程为：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

- 根据差分方程，就可以直接画出系统的直接 I 型结构。
- 输入组成**M**阶的延时网络，实现系统函数的零点。
- 输出反馈有**N**阶的延时网络，实现系统函数的极点。
- 两者通过级联形式连接。

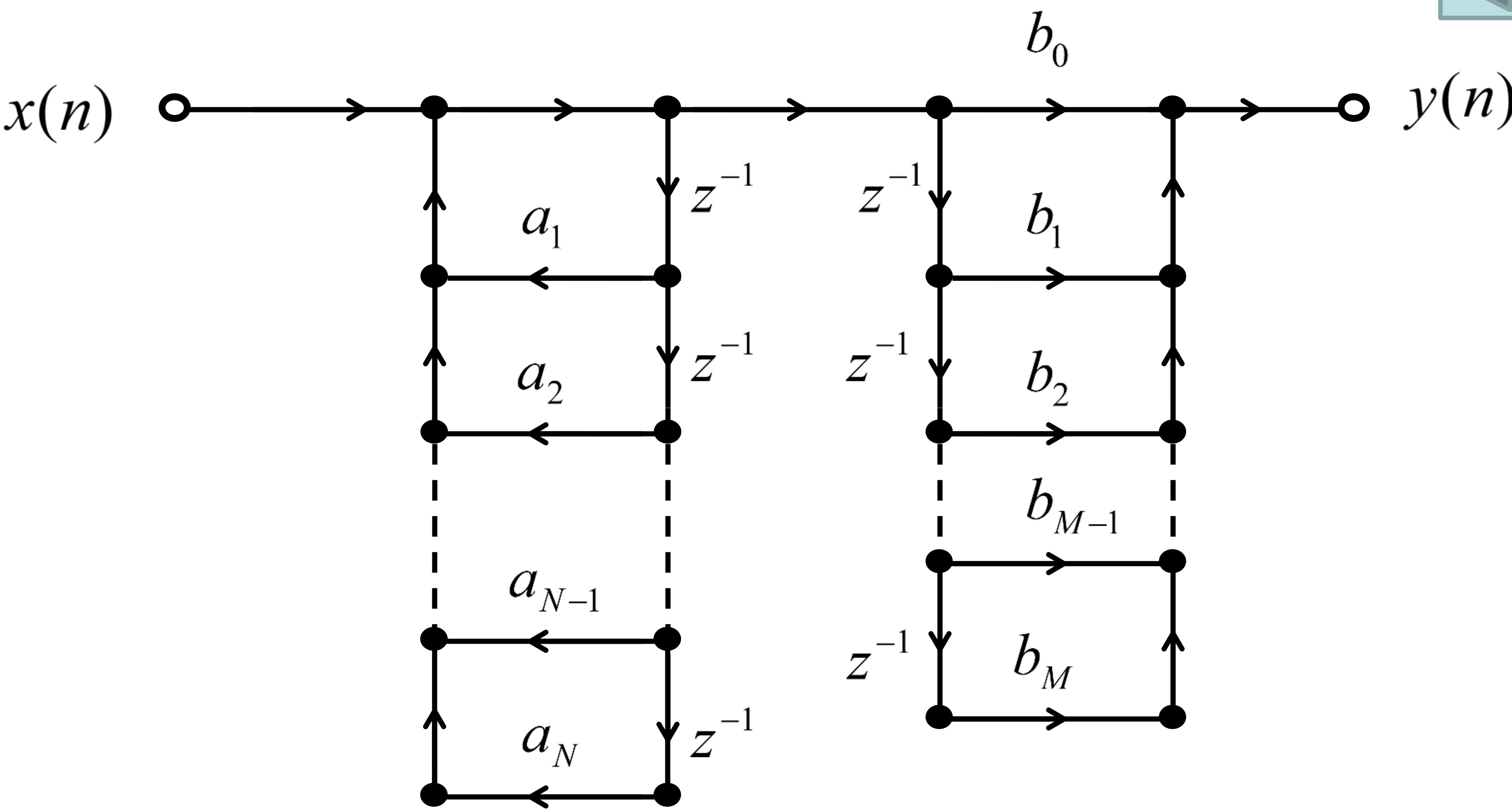
$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$



直接I型结构

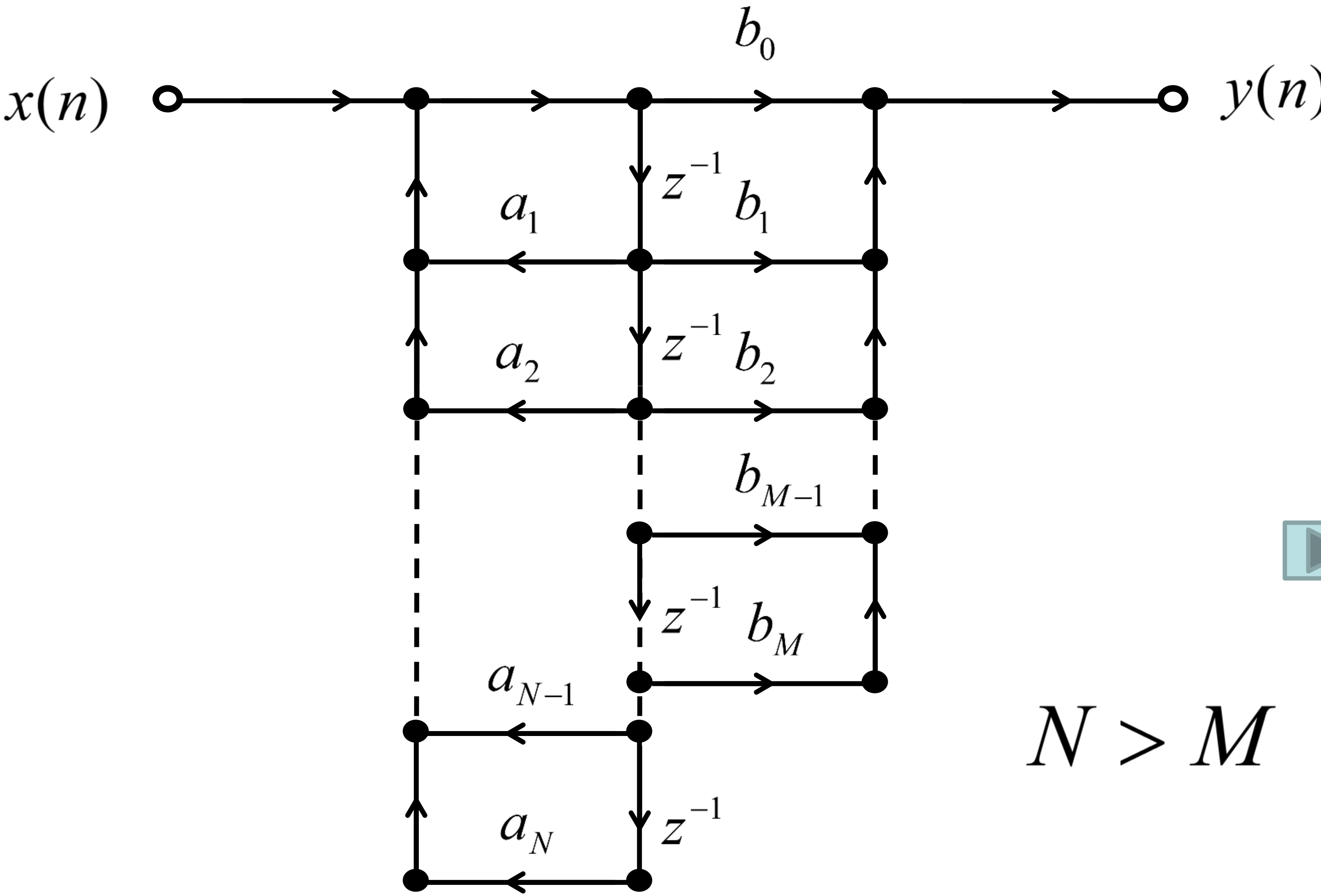
二、直接II型

- 线性移不变系统，可以交换其级联运算子系统的次序。
- 输入子系统、输出子系统交换次序，即为另一种结构。
- 两个子系统具有相同的延时单元，可以合并，即得到直接II型结构，称为典范结构。



直接I型结构变型：

零极点的级联次序互换



$N > M$

直接II型结构（典范结构）

直接II型的特点：

- N阶差分方程

  比直接I型少 …… 法

  中最少延时

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- 可以节省存 …… 存

  器（硬件实

- 系数 a_k, b_k 对滤波器的 能控制作用不明显，调整零极点较困难。

Why?

- 对系数变化过于灵敏，也就是对有限精度（有限字长）运算过于灵敏，容易出现不稳定，或者产生较大误差。

三、级联型

将系统函数按照零、极点进行因式分解

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-q_k z^{-1})(1-q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

- $M=M_1+2M_2,\ N=N_1+2N_2$
- 一阶因式表示实根， p_k 为实零点，c_k 为实极点
- 二阶因式表示复共轭根，q_k, q_k^* 表示共轭零点，

  d_k, d_k^* 表示共轭极点

一般将共轭因子组合为二阶因子，则

$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})}$$

还可以组合为

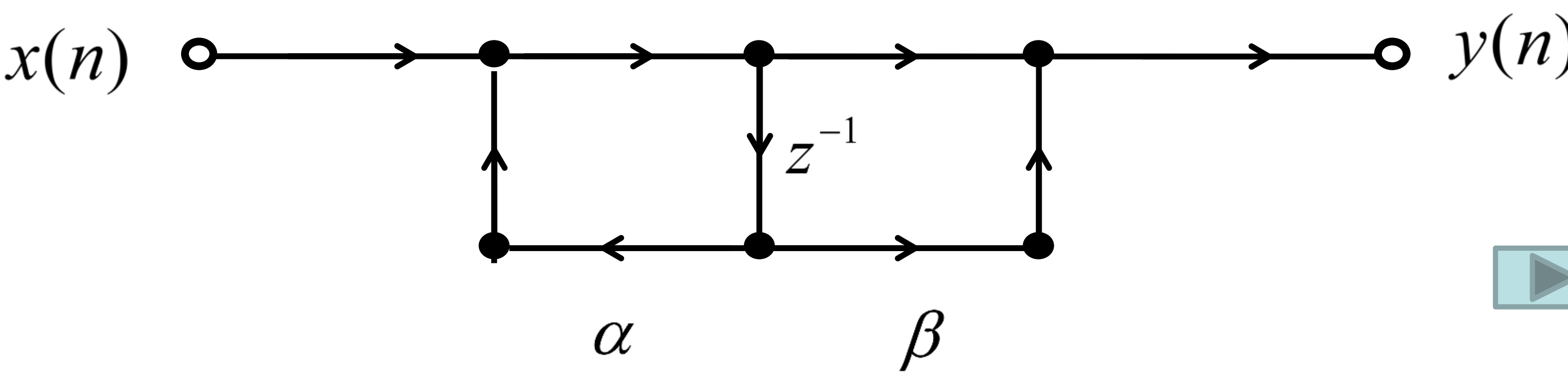
$$H(z)=A\prod_{k}\frac{(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})}=A\prod_{k}H_k(z)$$

$$H(z)=A\prod_k \frac{(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})}=A\prod_k H_k(z)$$

- 所有系数 $\alpha_{1k},\alpha_{2k},\beta_{1k},\beta_{2k}$ 均为实数。
- 当**M=N**时，有 $\left[(N+1)/2\right]$ 节。
- 如果有奇数个实零点，则有一个 β_{2k} 为零。
- 如果有奇数个实极点，则有一个 α_{2k} 为零。

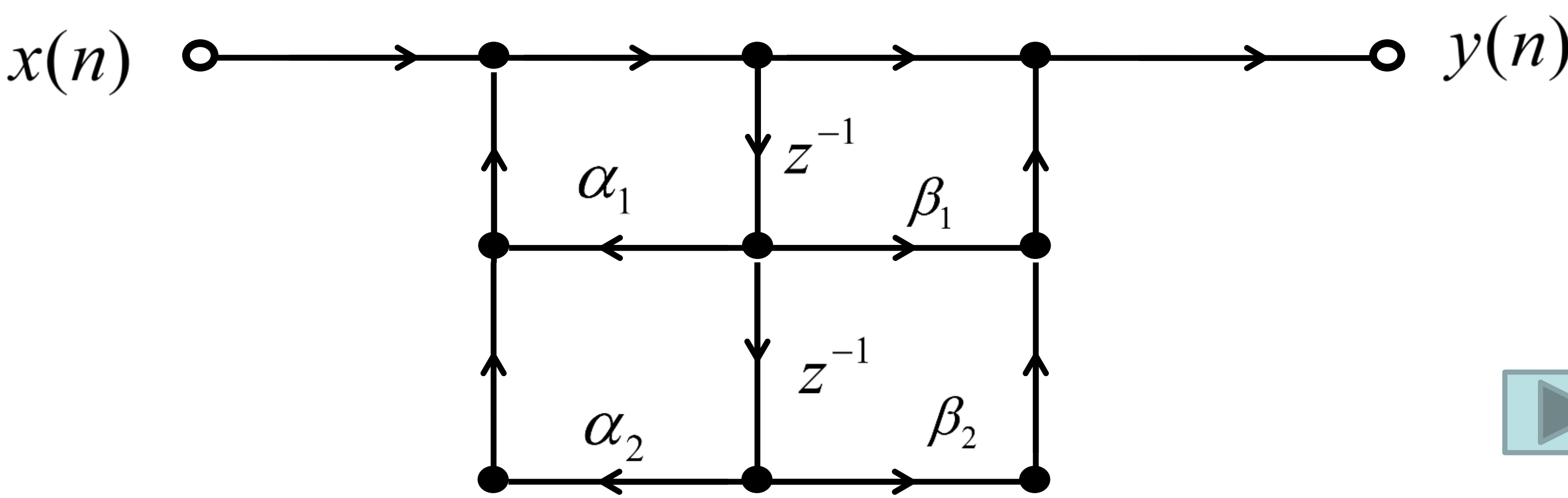
- 每一个一阶子系统称为一阶基本节

$$H_1(z) = \frac{1+\beta z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$



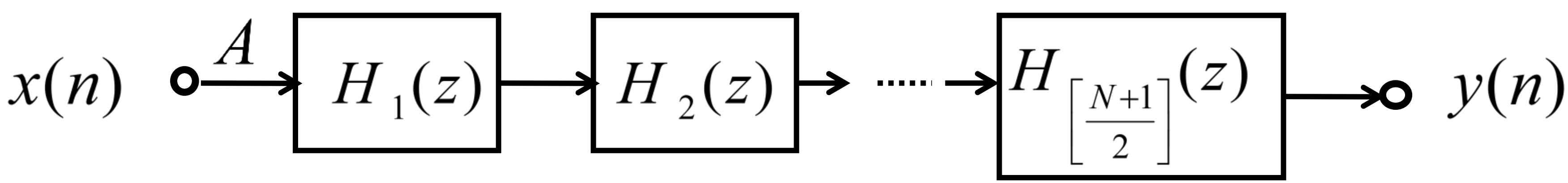
- 每一个二阶子系统称为二阶基本节

$$H_1(z)=\frac{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}}{1-\alpha_1 z^{-1}-\alpha_2 z^{-2}}$$



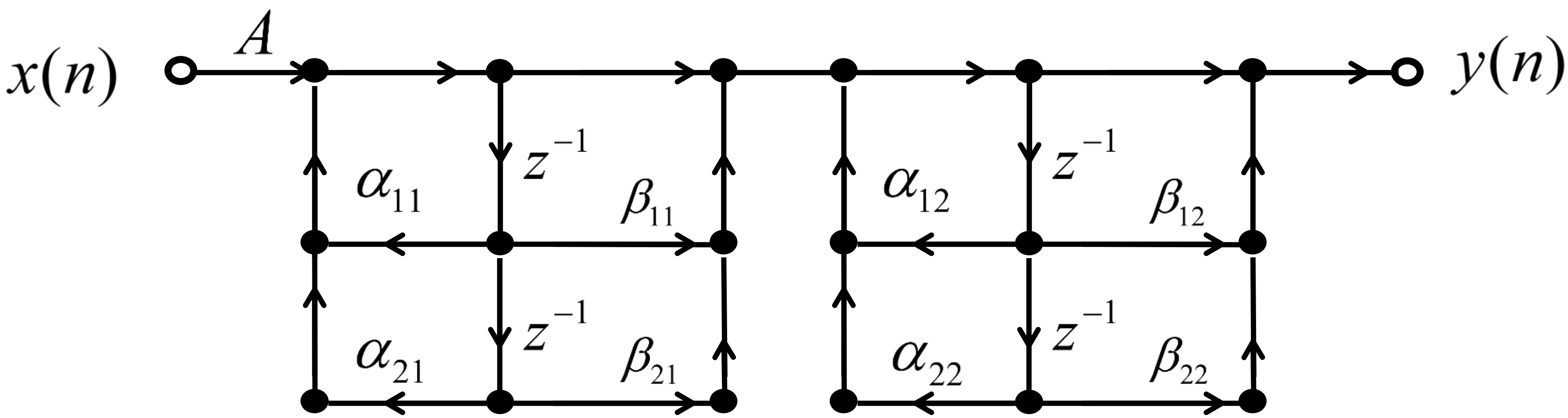
$$H(z) = A\prod_{k} \frac{(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})} = A\prod_{k} H_k(z)$$

级联结构如图所示



$$H(z) = A\prod_k \frac{(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})}$$

四阶的**IIR**滤波器的级联结构如图所示。



$$H(z)=A\prod_{k}\frac{(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{(1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2})}=A\prod_{k}H_{k}(z)$$

级联结构的特点

1. 调整系数 β_{1k},β_{2k} 就能单独调整滤波器的第k对零点；而不影响其它零、极点。

2. 调整系数 α_{1k},α_{2k} 就能单独调整滤波器的第k对极点；而不影响其它零、极点。

级联结构的特点

3. 便于准确实现滤波器的零极点，也即便于调整滤波器的频率响应性能。
4. 各个子系统的排列不同，所带来的误差也不同，存在一个最优化的问题。
5. 各个子系统的误差会积累。
6. 级联结构具有最少的存储器。

四、并联型

将系统函数进行部分分式展开，得到

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{B_k(1-g_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}+\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k} z^{-1}}{1-\alpha_{1k} z^{-1}-\alpha_{2k} z^{-2}}+\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$$

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}+\sum_{k=0}^{M-N}G_k z^{-k}$$

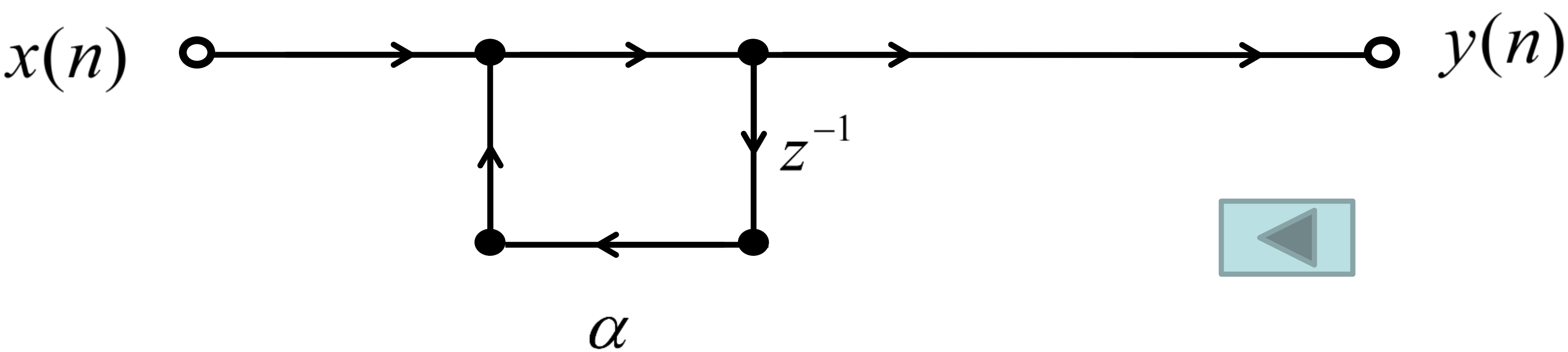
- $N=N_1+2N_2$
- 系数 a_k, b_k 是实数，故，$A_k, B_k, g_k, c_k, G_k, \gamma_{0k}, \gamma_{1k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ 都是实数， d_k^* 是 d_k 的共轭复数。
- 当**M<N**时，没有第三项。当**M=N**时，第三项为**G**$_0$

- 一般有 $M \le N$

- 系统由$\mathbf{N_1}$个一阶基本节， $\mathbf{N_2}$个二阶基本节组成

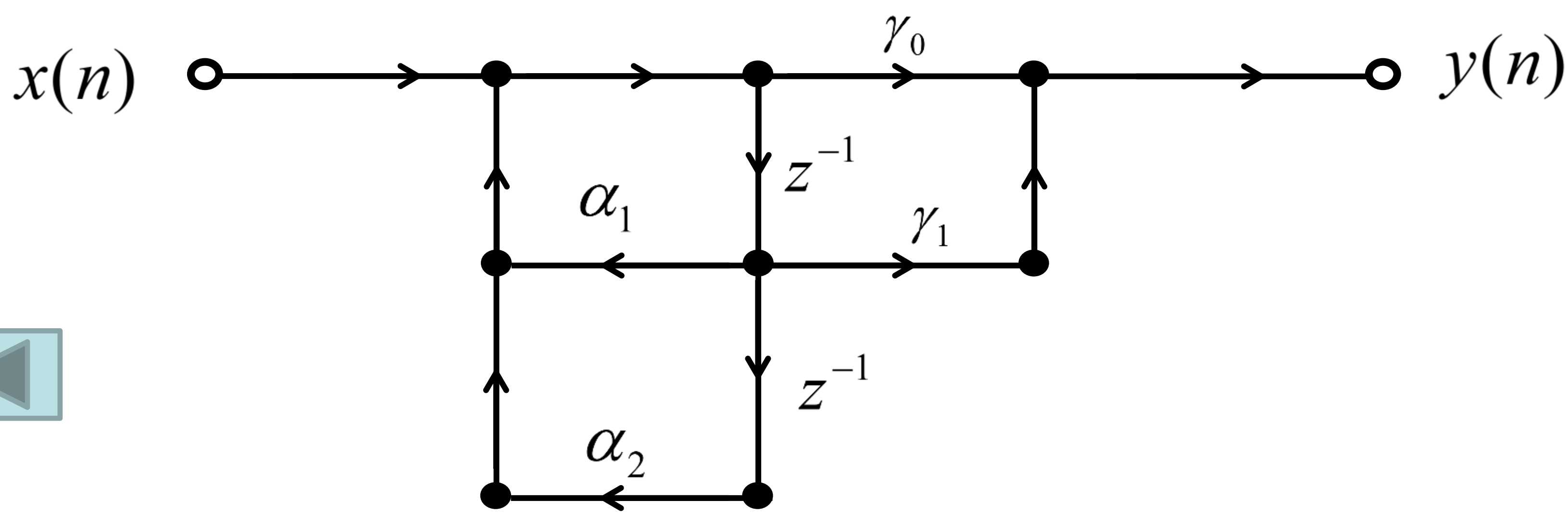
- 并联结构的一阶基本节结构

$$H_1(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$



- 并联结构的二阶基本节结构

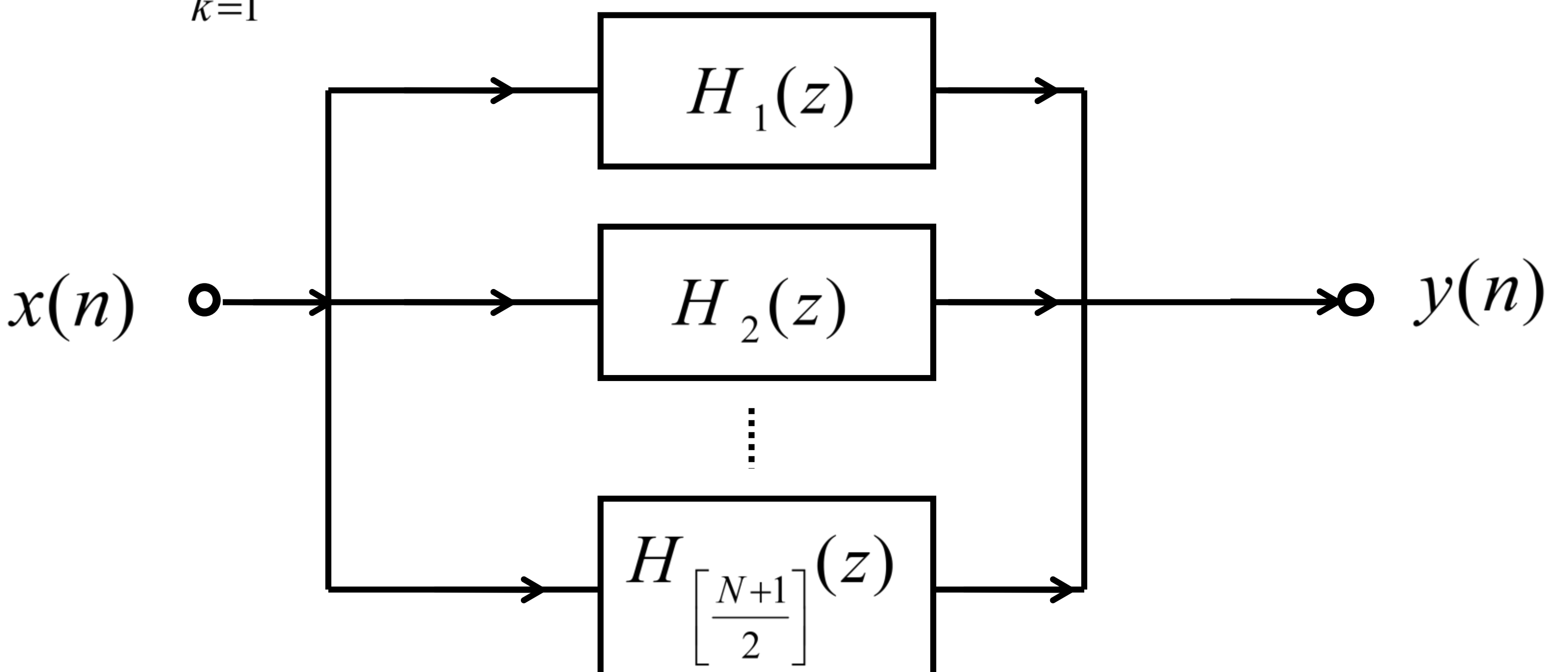
$$H_1(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z^{-1}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}}$$



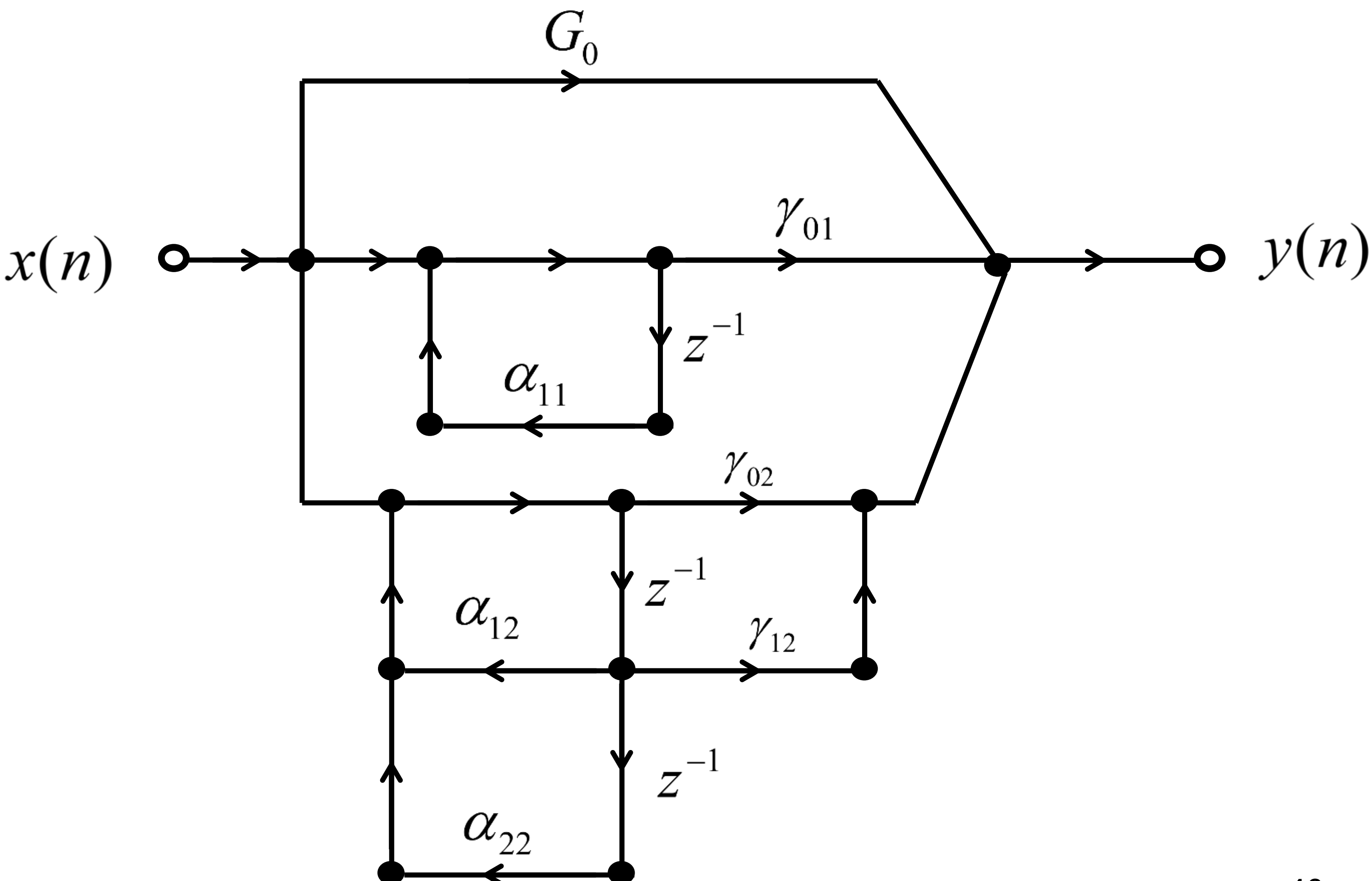
- 系统并联结构

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}+\sum_{k=0}^{M-N}G_k z^{-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}H_k(z)$$



- 三阶IIR滤波器的并联结构



并联结构的特点

1. 调整系数 α_{1k}, α_{2k} 就能单独调整滤波器的第**k**对极点；而不影响其它零极点。

2. 不能单独调整系统的零点。

3. 各个子系统的误差相互没有影响，因此，误差比级联结构要小。

五、转置定理

如果将原网络中所有的支路方向倒转，并将输入**x(n)**、输出**y(n)**相互交换，则其系统函数**H(z)**不变。

（不要求掌握）

例题：一个线性移不变系统的系统函数为：

$$H(z)=\frac{1+1.2z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.06z^{-2}}$$

画出该系统级联和并联结构（以一阶基本节表示）

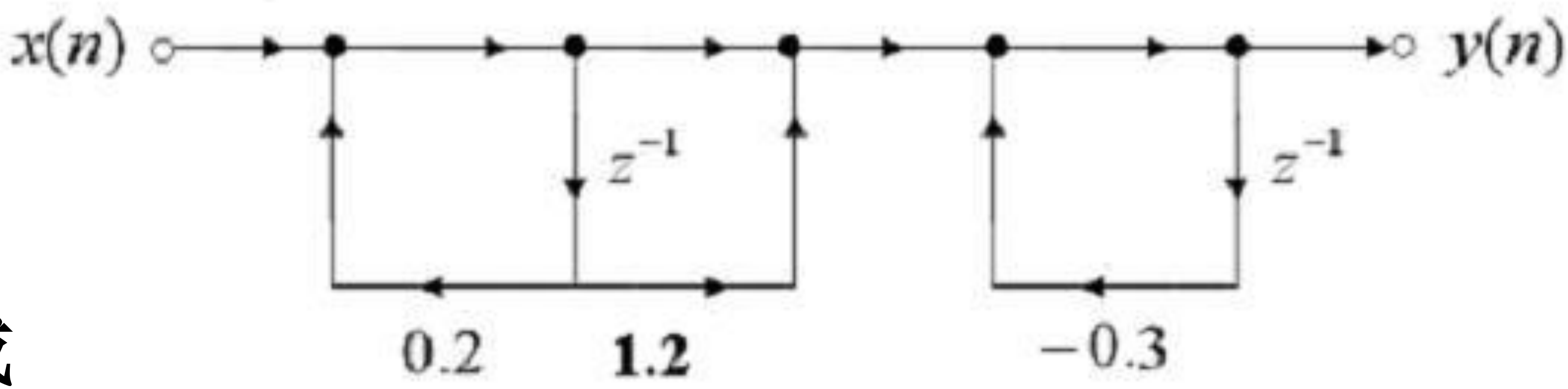
解： 将**H(z)**进行分解

$$H(z)=\frac{1+1.2z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.06z^{-2}}$$

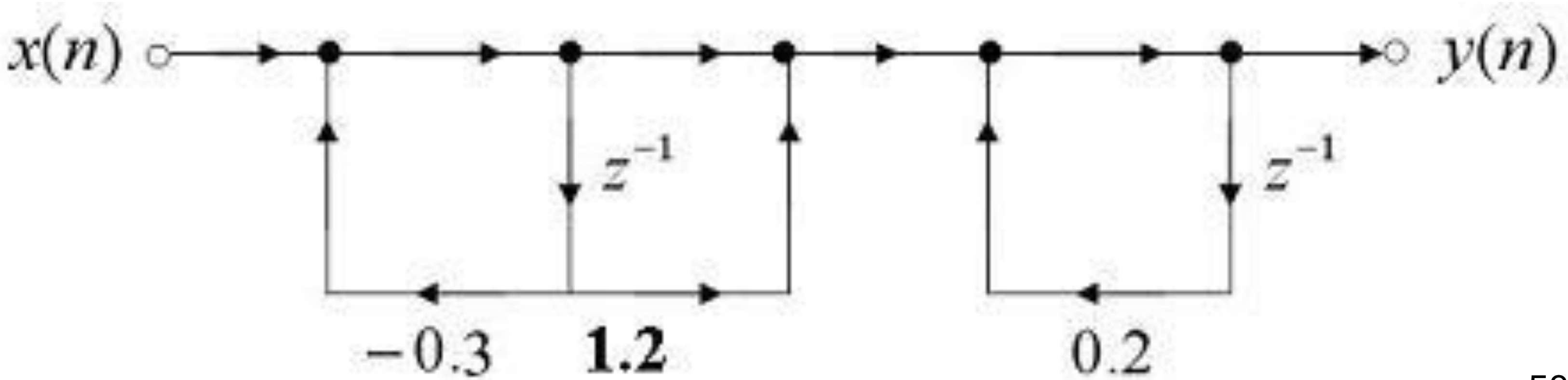
$$=\frac{1+1.2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.3z^{-1})}$$

$$H(z)=\frac{1+1.2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.3z^{-1})}$$

则，级联结构为



或



$$H(z)=\frac{1+1.2z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.06z^{-2}}=\frac{A}{1-0.2z^{-1}}+\frac{B}{1+0.3z^{-1}}$$

$$=\frac{A+0.3Az^{-1}+B-0.2Bz^{-1}}{\left(1-0.2z^{-1}\right)\left(1+0.3z^{-1}\right)}$$

$$\begin{cases}A+B=1\\0.3A-0.2B=1.2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2.8\\B=-1.8\end{cases}\quad H(z)=\frac{2.8}{1-0.2z^{-1}}+\frac{-1.8}{1+0.3z^{-1}}$$

故，并联结构为